João Pereira de Macedo

3º anno de Engenharia Civil

Universidade do Paraná

Coritiba, 20 Março 1915.

MECANICA GERAL

MECANICA GERAL

LIÇÕES PROFESSADAS

POR

J. Eulalio da Silva Oliveira

CAPITÃO DO ESTADO MAIOR DE 1ª CLASSE,
DOUTOR EM MATHEMATICA E SCIENCIAS PHYSICAS E LENTE
CATHEDRATICO DA ESCOLA SUPERIOR DE GUERRA

SEGUNDA EDIÇÃO

TOMO PRIMEIRO

RIO DE JANEIRO
IMPRENSA NACIONAL
1895

4063 — 94

AO EMINENTE SABIO

DOUTOR G. AUDIFFRENT

Ao terminar a bella memoria sobre a vida e a doutrina de Augusto Comte, dissestes :

« La confusion qui règne dans l'enseignement de la science fondamentale suffirait à elle seule pour faire sentir à tout bon esprit les dangers, tant moraux qu'intellectuels, du régime ontologique. Que l'on compare les traités didactiques de mécanique générale suivis dans nos principales institutions, à l'admirable systématisation de la science du mouvement que nous venons d'exposer, quoique succinctement, on verra qu'il est temps de soustraire notre jeunesse à l'action de professeurs incapables de s'élever à aucune vue d'ensemble, même dans la science qu'ils enseignent. Un jeune professeur à l'École Polytechnique de Rio de Janeiro, capitaine d'artillerie, M. J. Eulalio da Silva Oliveira, s'inspirant de l'œuvre du grand novateur et suivant, pour ainsi dire, pas à pas, ses indications, nous a donné récemment un admirable traité de mécanique rationelle, dont on chercherait vainement l'équivalent chez nous. Aucune science officielle n'existe dans son pays, et ceux à qui y est confié l'enseignement de la jeunesse peuvent chercher librement au dehors des maîtres plus dignes que ceux que nous impose depuis le commencement du siècle l'oppression académique. On ne saurait trop recommender la lecture de son remarquable traité. » (1)

Agradecendo-vos as lisongeiras palavras com que acolhestes as minhas lições de mecanica geral, permitti que esta segunda edição appareça sob os vossos auspicios. Ninguem conhecerá melhor que eu a insignificancia do trabalho que vos dedico, mas tudo é perdoavel á gratidão do meu reconhecimento.

Sou com todo o respeito

Vosso admirador e criado,

J. Eulalio

---

(1) Vide *Notice sur la vie et la doctrine d'Auguste Comte*, par le docteur G. Audiffrent. Paris, 1894.

INDICE

PRIMEIRA PARTE

APRECIAÇÃO FUNDAMENTAL

CAPITULO I

Concepções geraes

CAPITULO II

Preambulo geral

1. LEI DE KEPLER

2. LEI DE GALILEO

3. LEI DE NEWTON

4. PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

5. PRINCIPIO DAS VELOCIDADES VIRTUAES

CAPITULO III

Calculo das variações

SEGUNDA PARTE

ESTATICA

CAPITULO I

Theoria da composição das forças

1. FORÇAS CONVERGENTES

2. FORÇAS PARALLELAS

3. THEORIA DOS MOMENTOS

4. THEORIA DOS CONJUGADOS

CAPITULO II

Applicação das leis da composição das forças

1. THEORIA DOS CENTROS DE GRAVIDADE

2. COMPOSIÇÃO DAS GRAVITAÇÕES ELEMENTARES

CAPITULO III

Equilibrio de um systema invariavel

CAPITULO IV

Equilibrio de um systema variavel

1. METHODOS GERAES DE LAGRANGE

2. POLYGONO FUNICULAR

3. CATENARIA

4. CURVA DAS PONTES PENSIS

PRIMEIRA PARTE

APRECIAÇÃO FUNDAMENTAL

CAPITULO I

CONCEPÇÕES GERAES

1. Ha na historia da sciencia mathematica duas datas summamente memoraveis: são as que assignalam o nascimento de Descartes e Leibnitz. O primeiro d'estes eminentes philosophos nasceu em 1596 e o segundo em 1646.

Entre estes dois marcos historicos, decorre exactamente o periodo de 50 annos, que constitue, na phrase de A. Comte, o incomparavel meio seculo mathematico: foi n'esta época que surgiu a *mecanica geral*.

Kepler quando formulou as leis que regem o movimento planetario e Galileo ao crear a theoria da queda dos graves na superficie da terra, lançaram as bases fundamentaes da mecanica geral. Inaugurada esta sciencia, a sua evolução não se fez rapidamente, pois que o instrumento algebrico só depois de desembaraçar-se dos cuidados que a geometria reclamava é que pôde ser empregado nas especulações sobre a mecanica.

O esboço scientifico de Kepler e Galileo foi completado definitivamente por Christiano Huyghens e Jacques Bernouilli, que instituiram as leis da força centrifuga dos corpos e da communicação dos movimentos.

As concepções de Varignon e os trabalhos de João Bernouilli sobre a mecanica muito concorreram para esclarecer

os principios e simplificar a exposição d'esta sciencia. Elles muito auxiliaram a fundação da mecanica.

Depois da elaboração da sciencia por aquelles eminentes geometras é que foi opportuna a fundação da *mecanica celeste* por Isaac Newton.

Com esta magnífica construcção scientifica terminou o seculo XVII, cuja preponderancia sobre o seculo XVIII, relativamente ao dominio mecanico, não póde ser contestada.

A mecanica celeste foi a escola que espontaneamente surgiu para que a instituição abstracta das theorias da mecanica geral pudesse se effectuar.

D'esta origem concreta emanou a coordenação abstracta, a que Lagrange chamou a *Mecanica analytica*. Elle foi o Descartes da mecanica: completou a instituição da philosophia mathematica, estendendo á mecanica a systematisação algebrica da geometria.

Para que possamos explicar claramente a fundação da mecanica geral, devemos referil-a á evolução do espirito humano em busca do verdadeiro systema do mundo, com a qual conserva a mais intima harmonia.

A fundação da mecanica geral teve a mais profunda connexão com a descoberta do movimento da terra. Eis por que os antigos, que suppunham o planeta humano em uma situação estatica, não fundaram a mecanica geral. Eis por que Archimedes, que instituiu duas leis de equilibrio, não póde ser considerado como fundador da mecanica geral.

Só depois que Copernico, após 36 annos de continuas observações e profundas meditações, publicou em 1543 a sua concepção sobre o systema do mundo, que considerava o sol como o centro do nosso systema planetario e a terra como continuamente animada d'um movimento de rotação em torno do seu eixo e d'um movimento de translação em volta do sol; só depois que Kepler, em 1609, formulou as leis geraes do movimento dos planetas, e, finalmente, só depois que os cardeaes de Roma no Convento de Minerva, a 22 de junho de 1633, forçaram Galileo a subscrever a *Abjuração* das *heresias*

dos seus *Dialogos*, é que foi opportuno o esboço scientifico da mecanica geral.

Assim, os antigos não tiveram elementos para fundar a mecanica geral e só aos modernos estava reservada esta grandiosa construcção scientifica.

E a mais bella confirmação d'isto vae ser dada pelo venerando Galileo, que, em 1638, no seu Dialogo sobre a mecanica disse:

« Nós edificamos uma sciencia inteiramente nova sobre um assumpto tão velho como o mundo. Nada é mais antigo com effeito, na natureza, que o movimento; mas ainda que os philosophos hajam escripto grossos volumes sobre a materia, as mais importantes particularidades sempre foram ignoradas. Todos sabiam que o movimento dos corpos que cahem naturalmente se accelera; mas em que proporção tem logar esta acceleração, não se tinha ainda dito. Ninguem, com effeito, até o presente demonstrou que os espaços percorridos em tempos iguaes por um movel que cahe, a partir do repouso, são como os numeros impares. Todos sabiam que os projectis descrevem curvas, mas que estas fossem parabolas, ninguem ainda dissera. Demonstraremos que assim é e o nosso trabalho formará a base d'uma sciencia onde espiritos mais perspicazes penetrarão depois mais profundamente. »

2. *Concepção do espaço.*— O *espaço* [1] é um fluido universal cuja idéa nos permitte conceber a *extensão* e o *movimento* d'uma maneira puramente abstracta, independentemente dos corpos reaes.

E' um fluido subjectivo, de consistencia inferior á do fluido objectivo em que nos achamos habitualmente mergulhados, afim de que não possa oppôr nenhuma resistencia ás situações e movimentos a elle referidos. A condição necessaria a que a idéa do espaço deve satisfazer, para que possa servir aos nossos raciocinios, é de ser eminentemente

---

[1] A concepção subjectiva do espaço pertence ao dominio geometrico, e, portanto, esta apreciação é feita aqui sómente a titulo de recordação.

penetravel, de modo a conservar, sem deformação, as imagens dos corpos.

Quando seguimos no espaço um raciocinio sobre linhas, superficies ou volumes, si não imaginarmos que as extensões consideradas se hajam tornado solidas, ou, pelo menos, os limites d'estas extensões, é claro que as imagens que houvermos concebido se apagarão facilmente. E' por isto que suppomos o espaço como gazoso e as extensões, quaesquer que ellas sejam, como solidas.

Sendo o espaço uma creação do nosso espirito, poderemos dotal-o de differentes propriedades, no intuito de facilitar as nossas especulações scientificas. E' assim que, nas indagações sobre o movimento, suppomos o espaço como immovel, isto é, como um termo fixo de comparação para todos os movimentos que consideramos. Si para maior facilidade fosse preciso considerar o espaço em movimento, poderiamos fazel-o; bem como suppol-o colorido ou odorante, ou mesmo dotado d'outras qualidades physicas, *si isto servisse para alguma cousa*.

3. A successão dos diversos phenomenos, a sua duração e o intervallo que os separa nos dão uma idéa precisa e exacta da noção simples do *tempo*.

A unidade de tempo, geralmente adoptada para os usos ordinarios da vida, é *o dia solar médio*, que divide-se em 24 horas, sendo que a hora divide-se em 60 minutos e o minuto em 60 segundos. E' esta unidade, *o segundo sexagesimal de tempo médio*, que adopta-se em mecanica como *unidade de tempo*; bem como o *metro* é a *unidade linear* adoptada na avaliação do espaço percorrido por um corpo em movimento.

4. A *mobilidade* é uma propriedade universal da materia, muito embora todos os corpos não se achem sempre em movimento. A immobilidade ou *repouso* em que um corpo possa achar-se é sempre um estado de simples *equilibrio* e, portanto, devido a uma exacta e completa neutralisação de certos e determinados movimentos. A mobilidade é uma propriedade essencial a todos os corpos, quaesquer que estes sejam.

Define-se o *movimento* como sendo o phenomeno que se manifesta quando um corpo ou algumas de suas partes occupam successivamente differentes logares no espaço. Isto equivale a dizer, que um corpo está em movimento quando a sua posição no espaço varia com o tempo.

Não póde uma comparação ser racionalmente estabelecida entre duas grandezas heterogeneas, taes como *o espaço e o tempo*; mas, podemos comparar a relação das partes d'um espaço percorrido com as partes correspondentes do tempo. Com effeito, a duração do preenchimento gradual de diversos phenomenos nos offerece uma exacta medida do tempo e esta medida póde ser sempre reductivel á consideração de uma extensão linear. Ora, conhecida a analogia entre a relação que as partes lineares do tempo têm para com a sua unidade e tambem a relação que as partes lineares do espaço percorrido por um ponto animado d'um movimento qualquer têm para com a sua unidade, poderá essa analogia ser traduzida algebricamente por uma equação. Esta equação poderá, pois, definir uma curva, cujas abscissas representem as partes do tempo decorrido desde a origem do movimento e cujas ordenadas correspondentes designem os espaços percorridos pelo ponto durante estas mesmas partes do tempo. Ella será o que se chama a *equação do movimento sobre a trajectoria*.

5. Quando um corpo desloca-se em relação ao espaço supposto immovel ou em relação a corpos considerados como fixos no espaço, diz-se que o seu movimento é *absoluto*; e quando o movimento é referido ao espaço supposto movel ou a corpos em movimento, diz-se que o seu movimento é *relativo*.

A observação e a experiencia nos ensinam que todo o movimento, no caso o mais geral, é necessariamente composto de dois movimentos simultaneos: d'uma translação e d'uma rotação.

Só por uma excepção, rigorosamente determinada por condições restrictas, especiaes e precisas, é que qualquer destes dois movimentos poderá manifestar-se como si fosse

o unico a animar o movel. Resulta d'aqui que poderá haver rotação sem translação e vice-versa; mas, estes dois movimentos são nos casos normaes sempre coexistentes.

O simples phenomeno da queda d'um corpo livre constitue um exemplo edificante da coexistencia das duas especies de movimento: todos os pontos do grave deslocam-se progressivamente em linha recta e, ao mesmo tempo, elle gyra, sem cessar, em torno de um de seus pontos. O movimento *progressivo* é chamado de *translação* e o movimento *gyratorio* é o movimento de *rotação* do corpo considerado.

Chama-se *trajectoria* de um ponto em movimento a linha formada pelas posições successivas d'este ponto. O movimento é *rectilineo* ou *curvilineo*, quando a trajectoria é recta ou curva.

O movimento d'um ponto será completamente definido, si conhecemos a trajectoria do movimento e a lei segundo a qual elle a percorre, a partir de uma posição inicial determinada.

6. Dá-se o nome de *corpusculo, particula* ou *ponto material* a um corpo infinitamente pequeno em todas as suas dimensões e designa-se pelo nome de *massa* a quantidade de materia que constitue um corpo qualquer.

Em mecanica entende-se por *systema de pontos materiaes* um corpo qualquer ou tambem um conjuncto de corpos quaesquer, convenientemente ligados. Os *systemas* podem ser considerados sob duas categorias diversas: como *invariaveis* e como *variaveis*. São invariaveis os systemas cujas posições relativas de seus differentes pontos não podem ser alteradas, quaesquer que sejam as situações dos mesmos systemas no espaço. Ou por outra: são *invariaveis* os systemas que conservam rigorosamente as suas fórmas geometricas, quaesquer que sejam as suas posições no espaço.

São *variaveis* os systemas que mudando de posição no espaço podem affectar differentes fórmas geometricas.

Os systemas invariaveis chamam-se tambem *solidos*

invariaveis, solidos geometricos ou simplesmente *solidos*. Isto basta para podermos dizer que os *solidos* são uma creação do nosso espirito, verdadeiros *typos* geometricos, cuja concepção necessaria nos vem da *geometria particular*.

Os systemas variaveis podem ser solidos ou fluidos. Os primeiros podem ser descontinuos, flexiveis ou inflexiveis, extensiveis ou inextensiveis, elasticos ou inelasticos, conforme as suas propriedades ou caracteres physicos. Os fluidos, que são os systemas dotados da mais extrema variabilidade, são tambem considerados de accôrdo com as suas propriedades physicas.

7. *Problema geral da mecanica.* — A mecanica geral é a sciencia que tem por fim estabelecer as theorias geraes e abstractas do equilibrio e movimento dos corpos. A composição e decomposição dos movimentos são, em geral, o objecto d'esta sciencia. Ella possue dois modos geraes e unicos para realizar a composição dos movimentos: por *composição directa* e por *communicação mutua*. Na composição directa dos movimentos, os corpos são suppostos sómente animados de movimentos de translação e podem ser considerados como si fossem simples pontos materiaes. Na communicação mutua dos movimentos, os corpos são considerados animados de movimentos quaesquer, de rotação ou de rotação e translação, e não podem ser considerados simples pontos materiaes.

Attendendo aos dois modos igualmente geraes que regulam a composição dos movimentos, vemos que são dois os problemas fundamentaes da mecanica geral. E cada um d'estes dois problemas de composição dos movimentos admittirá necessariamente um problema de decomposição, isto é, um problema inverso.

1.º *Problema.* — Nos movimentos de translação, *determinar o movimento total que resulta da coexistencia de muitas translações separadamente conhecidas*. Reciprocamente, *sendo dado um movimento composto, determinar os movimentos componentes*.

2.° *Problema.* — Nos movimentos de rotação ou no caso de movimentos quaesquer, *determinar o movimento resultante da combinação do movimento total de cada corpo ou ponto com o movimento das outras partes de um mesmo systema sufficientemente definido segundo uma constituição qualquer.* Reciprocamente, *sendo dado um movimento composto qualquer, de um systema cujas ligações de seus corpos ou pontos sejam conhecidas sufficientemente, determinar os movimentos componentes.*

Para exemplo do primeiro problema, no caso directo, imaginemos um projectil lançado no espaço por uma dada impulsão e continuamente sujeito á acção da gravidade, abstracção feita de todos os modificadores, taes como a resistencia do ar, etc. Teremos que determinar completamente todas as circumstancias do movimento do projectil, conhecidos os movimentos simultaneos que a impulsão e a gravidade poderiam separadamente produzir no mesmo corpo.

Para exemplo do segundo problema, no caso directo, recorramos ao nosso systema do mundo. Si fossem conhecidos os diversos movimentos de cada um dos planetas do nosso systema solar, qual seria o movimento do mesmo systema?

A questão consistiria em determinar completamente o movimento total que resultaria da combinação que effectivamente teria cada um dos planetas com os movimentos effectivos de todos os demais planetas, regidos pela lei da gravitação e pertencentes ao mesmo systema solar.

Os dois exemplos que acabamos de dar nos mostram claramente que a combinação dos movimentos apresenta *dois gráos* muito distinctos, conforme tenhamos de combinar as diversas translações d'um mesmo corpo, ou os diversos movimentos quaesquer de differentes corpos, ligados entre si d'uma maneira qualquer.

No primeiro gráo de composição dos movimentos, a questão sómente consiste na directa combinação de movimentos simultaneos e coexistentes. No segundo gráo de

composição, a questão consiste na communicação reciproca de movimentos simultaneos que se modificam segundo as ligações dos corpos do systema considerado.

O segundo gráo de combinação dos movimentos suppõe ordinariamente o estudo do primeiro gráo. Por exemplo, si imaginarmos dois projectis ligados por uma haste invariavel e lançados ao mesmo tempo por duas boccas de fogo differentes, teremos primeiro de conhecer o movimento de cada projectil como si fosse livre e, depois d'isto, saber como estes movimentos livres se perturbam por causa da haste invariavel que constitue a ligação dos projectis.

E' facil conceber que as leis de ligação dos corpos d'um systema, sem que sejam o assumpto principal dos problemas da mecanica, sempre se acham em intima connexão com as leis da composição dos movimentos dos mesmos corpos.

8. *Motores e moveis.*— Ha duas maneiras de considerar os corpos em qualquer movimento, conforme exerçam ou soffram a acção no conflicto. No primeiro caso os corpos são *motores*, no segundo são *moveis*. Cada um d'estes dois modos exige uma concepção subjectiva e estas duas concepções constituem o que se chama a *base logica* ou subjectiva da mecanica geral.

9. *Concepção das forças.*—A mecanica geral e abstracta não póde ser verdadeiramente constituida sem a noção de *força*.

E' uma noção moderna, que ainda hoje dá ensejo a muitas divagações. Para tornal-a clara e precisa, devemos notar que a noção de *força* ou de esforço é fornecida pela sensação muscular inherente a toda acção que exercemos para mobilisar ou immobilisar um corpo dado.

Os movimentos que resultam d'esta acção sobre os corpos são conhecidos por *movimentos communicados*, em opposição aos *movimentos espontaneos* devidos á actividade propria dos corpos.

Para que as theorias da mecanica possam ser sufficientemente geraes, nada mais concebivel do que fazer abstracção

dos movimentos espontaneos e substituil-os todos por movimentos communicados, devidos a esforços exteriores equivalentes, isto é, a esforços capazes dos mesmos effeitos.

Assim, em todos os casos, *a força é a acção exterior pela qual produz-se ou imaginamos produzir um movimento ou um equilibrio*.

Uma força representa, portanto, a acção d'um *motor* sobre um *movel*, abstracção feita da natureza determinada do *motor* e das circumstancias, em virtude das quaes elle actua, bem como devemos abstrahir da reacção do *movel* sobre o *motor*.

O simples equilibrio de duas forças iguaes e contrarias *seria radicalmente duvidoso*, si o ponto que ellas comprimem reagisse por sua actividade propria.

As forças podem ser encaradas sob muitos aspectos differentes e nós as consideraremos sob estes differentes pontos de vista, á medida que formos necessitando. Por emquanto, dizemos apenas que, em relação á sua origem, as *forças* podem ser *reaes* ou *imaginadas*.

São *forças reaes* os esforços effectivamente empregados por certos corpos para mover outros corpos. São *forças imaginadas* os esforços suppostos exercidos sobre um corpo para communicar-lhe um movimento que realmente resulte de sua propria actividade.

E' a Varignon que primeiro devemos a consideração das *forças* nas especulações sobre a mecanica. Desde 1687, a obra do illustre geometra, intitulada *Projet d'une nouvelle mechanique*, tornou conhecidos os traços da *Nouvelle mechanique*, obra posthuma, publicada em 1725 pelo grande Fontenelle, a quem Varignon confiou por testamento todos os seus trabalhos ineditos.

« O que precede basta, sem que seja util insistir mais longamente, para mostrar tudo o que ha de subjectivo n'essa noção de *força*, a que dão usualmente um valor absoluto e objectivo e que não é no fim de contas senão uma construcção do espirito. D'outra parte, é preciso não esquecer que essa noção, que permitte referir todos os principios da mecanica a

um mesmo ponto de vista, data apenas de dois seculos, e que a imputal-a ás intelligencias de um passado mais remoto e sobretudo ás da antiguidade, tão estranhas ás concepções d'essa natureza, seria tão falso quanto irracional ». (Pierre Laffite.)

10. *Concepção da inercia.*— Consiste a concepção relativa aos moveis em consideral-os sempre em um estado ficticio de passividade ou *inercia. E' a propriedade attribuida aos corpos de não poderem modificar por si mesmo o estado de repouso ou de movimento em que se acham, de modo que todo movimento ou modificação qualquer que os corpos nos apresentam é sempre attribuida a uma força exterior.*

Physicamente considerados são os corpos realmente activos e manifestam a sua actividade sob aspectos diversos e variados. E' assim, por exemplo, que a lei da gravitação planetaria nos ensina que dois corpos quaesquer do nosso mundo, separados por uma distancia qualquer, gravitam incessantemente um para o outro. E' assim que a queda de um grave que parte do repouso, a uma certa distancia do sólo, é realmente devida á propria actividade do corpo. E' assim que, aos nossos olhos, se manifestam numerosos phenomenos cosmicos que dão logar a movimentos tão intensos como extensos. A materia é, pois, activa.

A hypothese da *inercia* dos corpos destina-se exactamente á assimilação dos *movimentos espontaneos* aos *movimentos communicados*, que sendo os mais simples e os mais familiares nos conduziram ao estabelecimento da concepção das forças. A mecanica precisa do *artificio logico da inercia*, que consiste na substituição da actividade espontanea da materia por forças exteriores equivalentes.

No caso da queda de um grave, por exemplo, o resultado é o mesmo, quer se supponha a queda devida á actividade propria do corpo que cahe, quer se diga que o corpo foi solicitado por uma força exterior n'elle applicada e dirigida para o centro da terra, capaz dos mesmos effeitos.

11. *Posição da mecanica geral.*—O logar que compete

á mecanica geral na hierarchia scientifica, sabem todos aquelles que estudam as sciencias fundamentaes. No estudo da sciencia mathematica passámos successivamente da consideração do *numero* á da *extensão* e da *extensão* ao *movimento*; e, si não fosse a creação da mecanica geral, a mathematica ainda hoje estaria afastada do conjuncto da Philosophia Natural. Ella, a mecanica geral, é o laço directo do dominio mathematico com as sciencias cosmologicas, porque antes do seu advento a mathematica era simplesmente reduzida ao calculo e á geometria e só considerava, portanto, o movimento a titulo de imagem, sem a noção do tempo e da força, de modo a suppôr os corpos sempre inactivos, ficando, dest'arte, a mathematica sem nenhuma ligação com as sciencias physicas.

A sciencia mathematica póde ser normalmente condensada na geometria: o calculo é a sua introducção e a mecanica geral o seu complemento. A geometria abstrahe das entidades mecanicas, da mesma maneira que a mecanica, por sua dupla concepção das forças e da inercia, torna-se geral e abstracta, e afasta as considerações especiaes sobre a natureza dos motores e sobre a actividade da materia. E é justamente por esta importante concepção da inercia que *a mecanica geral serve de transição entre a mathematica e a physica*. Tal é o logar ou a posição da mecanica geral.

12. *Dominio da mecanica geral.*—A mecanica geral, complemento necessario da sciencia mathematica, ficará eternamente limitada ao estabelecimento das theorias abstractas do equilibrio e movimento, sem jámais poder chegar ás soluções completas de problemas especiaes que exigem apreciações superiores, que só podem provir do dominio das sciencias physicas. Ella, a mecanica geral, deve-se conformar com a geometria, que, sendo mais simples, renuncia entretanto á consideração de questões especiaes.

Quando vemos a geometria limitar o problema das rectificações, quadraturas e cubaturas, não devemos esperar que a mecanica geral possa alcançar soluções precisas em problemas mais complexos. Jámais poderemos determinar completamente o movimento total d'um solido homogeneo de figura

qualquer, animado d'um simples impulso; e o nosso trabalho chegará apenas a transformar em difficuldades algebricas ou geometricas os embaraços a que dão directamente logar as applicações da nossa theoria geral da rotação dos solidos.

O nome de *mecanica racional*, que usualmente tem a mecanica geral, é sufficientemente proprio a indicar os limites convenientes do dominio d'esta sciencia. Ella só se occupa das noções verdadeiramente geraes sobre o equilibrio e movimento.

13. *Divisão da mecanica geral*.—A principal divisão d'uma sciencia, tão philosophica como a mecanica, deve ser sempre relativa ao phenomeno que ella estuda. E como o repouso e o movimento são as duas unicas manifestações da mobilidade dos corpos, é claro que, subjectivamente considerando, a mecanica geral se dividirá em duas partes unicas: uma que estuda as condições da immobilidade, repouso ou equilibrio e outra que estuda as circumstancias proprias ao movimento dos corpos. A primeira parte chama-se desde Archimedes a *estatica*. A segunda parte chama-se desde Galileo a *mecanica* ou desde D'Alembert a *dynamica*.

Estas duas partes da mecanica geral são historicamente separadas por um intervallo de 18 seculos, que, na phrase d'um distincto geometra, constitue a infancia da mecanica. D'este immenso periodo historico, unicamente determinado por motivos philosophicos e sociaes, além das duas leis com que Archimedes esboçou a estatica, apenas Stevin, por sua theoria do equilibrio dos pesos applicados sobre planos inclinados, concorreu para o advento da mecanica geral.

Attendendo ao destino desta sciencia, que é estabelecer a ligação entre a mathematica e a physica, a divisão da mecanica geral nos obriga a começar o seu estudo pela estatica, que, estabelecendo as condições da immobilidade dos corpos, liga a mecanica á geometria em cujo dominio são os corpos tambem suppostos immoveis.

Na *geometria*, a noção de movimento é sómente empregada a titulo de imagem, fazendo-se abstracção do *tempo;* e

na *estatica* as condições de equilibrio são tambem independentes do *tempo*.

A estatica não póde ser completamente instituida, sem ficar subordinada ás leis fundamentaes do movimento. Si nos limitarmos a casos particulares, verdadeiramente elementares, é claro que a simples inducção nos fornecerá as leis de equilibrio, como forneceu a Archimedes *a lei da alavanca* e *a lei dos corpos fluctuantes*; mas, si quizermos as condições geraes de equilibrio no caso de forças dadas d'uma maneira qualquer, é claro que deveremos considerar o equilibrio como devendo resultar da neutralisação completa de movimentos quaesquer. Eis como os geometras que concorreram para a fundação da mecanica geral comprehenderam o problema geral da estatica: como assentando sobre as leis fundamentaes do movimento.

Lagrange, que construiu a estatica sobre a lei geral de equilibrio, *a lei das velocidades virtuaes*, necessariamente suppoz que este principio fosse puramente inductivo e não pudesse resultar das leis fundamentaes do movimento; mas, nós mostraremos que assim não é. Então, facilmente se comprehenderá que a *estatica* só poderá ser geralmente considerada sob a feliz inspiração das leis do movimento.

A instituição das condições de equilibrio dependem tão sómente do preambulo geral da dynamica, que consiste no estudo das leis physicas do movimento. Na estatica podemos sempre suppôr *instantaneas* as forças consideradas, pois que as condições de equilibrio não dependem do *tempo*, cuja consideração é indispensavel na dynamica, que essencialmente considera *as forças continuas*.

As forças instantaneas, como veremos, dão logar a *movimentos uniformes* e as forças continuas produzem *movimentos variados*. E como a estatica corresponde ao estudo das forças instantaneas, vê-se claramente que ella depende sómente da theoria do movimento uniforme.

Resulta do que temos dito que a estatica é ao mesmo tempo independente e dependente da dynamica. Considerada como estudo das forças instantaneas, é independente; mas,

como exigindo o conhecimento dos movimentos uniformes, torna-se dependente da dynamica.

Eis por que antes de fazermos a elaboração da estatica trataremos do *preambulo geral da dynamica*, ou estudo das leis physicas do movimento. Considerando a estatica como dependendo da dynamica dos movimentos uniformes, isto é, como um caso particular da dynamica, poderemos instituil-a completamente, sem que precisemos considerar o principal problema da dynamica, que consiste no estudo dos movimentos variados.

14. *Subdivisão da mecanica geral.*—A mecanica geral é uma sciencia totalmente abstracta, eminentemente philosophica, constituida de duas partes espontaneamente subjectivas. Uma distincção feita sobre o estado physico da materia levou os geometras a admittirem uma mecanica para os solidos e outra para os fluidos. A primeira dividiram em *estatica* e *dynamica*, a segunda em *hydrostatica* e *hydrodynamica*. Lagrange, coordenando a mecanica, ligou convenientemente essas quatro partes, de modo que constituissem uma unica sciencia, combinando o desenvolvimento historico com o encadeamento didactico.

Apezar da superioridade didactica d'essa subdivisão objectiva, sobre a divisão subjectiva relativa ao equilibrio e movimento (pois que, sem duvida, é mais profunda a distincção entre os estados physicos da materia, que a distincção entre o equilibrio e movimento), é sufficientemente clara a sua inferioridade, no ponto de vista da mecanica geral.

Com effeito, o caracter abstracto d'esta sciencia a torna insufficiente para estabelecer distincções que só a physica póde fazer taes como as que se referem ao estado dos corpos. Não é á mecanica geral que cumpre alterar as leis do equilibrio e movimento, tendo consideração a modificadores quaesquer. Ella, a mecanica geral, deve limitar-se ao estado solido, cujas leis de equilibrio e movimento são as mais geraes e communs a todos os casos.

Impugnando a subdivisão objectiva da mecanica geral,

passemos a considerar a sua *subdivisão subjectiva*, reclamada unicamente pelo ponto de vista do ensino da sciencia.

O duplo problema geral da mecanica, como vimos, nos indica que a composição e decomposição dos movimentos fazem-se por dois modos igualmente geraes, conforme os corpos possam ser considerados como simples pontos materiaes ou como systemas de corpos ligados entre si. Apparentemente objectiva esta distincção, vemos entretanto que ella é de caracter totalmente subjectivo, visto como corresponde á distincção fundamental entre translação e rotação, movimentos que são simultaneos, mas que podem ser successivamente estudados.

Inutil em estatica é a distincção entre ponto e systema e só devemos fazel-a na dynamica. Eis, em conclusão, o quadro que resume as divisões *subjectiva* e *didactica* da mecanica geral:

Mecanica geral......	Estatica.	
	Dynamica....	Do ponto material.
		Dos systemas de corpos.

CAPITULO II

PREAMBULO GERAL

15. A mecanica geral, cujas concepções subjectivas vimos de esboçar superficialmente, tem um duplo problema a resolver no estudo da composição dos movimentos. Ella precisa de uma *base objectiva*, fornecida pela inducção, constituida pelas leis physicas irreductiveis, necessarias e fundamentaes ao estudo da composição dos movimentos.

Estas leis physicas de movimento são tres sómente, porque tres são os casos distinctos na composição dos movimentos : dois na composição das translações e um na composição das rotações.

Os dois primeiros casos são : 1º, quando o movel é sujeito á acção de uma unica força, não havendo propriamente composição de movimentos ; 2º, quando o movel é animado simultaneamente de translações quaesquer.

O terceiro caso é o da communicação do movimento entre corpos ou pontos d'um mesmo systema, isto é, convenientemente ligados.

Essas tres bases inductivas da theoria do movimento são necessariamente completadas por certos principios geraes que a ellas se ligam com a maxima espontaneidade: são os seus complementos naturaes.

1. LEI DE KEPLER

16. A Kepler devemos a verdadeira noção geral da primeira lei dos movimentos de translação.

E' a lei conhecida pelo nome de *lei da persistencia do movimento* e impropriamente por alguns chamada de *lei da inercia no movimento*.

Eis como Kepler induziu a sua lei :

« Quando lançamos uma bola sobre uma superficie plana e horizontal, vemol-a mover-se em linha recta ; a velocidade da bola vae decrescendo progressivamente ; mas, se repetimos a experiencia sobre planos cada vez mais polidos, verificamos que o decrescimento progressivo da velocidade é cada vez menos sensivel : o movimento prolonga-se cada vez por mais tempo e sempre em linha recta. E' pois racional admittir que si pudessemos supprimir toda resistencia, quer da parte do plano, quer da parte do ar, o movimento continuaria indefinidamente, com sua velocidade e direcção iniciaes. »

Lagrange, na *Theoria das funcções analyticas*, assim formúla a primeira lei do movimento :

« A observação e a experiencia nos fazem ver que um corpo posto em movimento d'uma maneira qualquer, si se afastam todas as causas de alteração que podem agir sobre elle, continúa a mover-se por si mesmo com um movimento rectilineo e uniforme, d'onde segue-se que a velocidade, uma vez impressa, conserva-se sempre a mesma e segundo a mesma direcção. »

E, segundo A. Comte, esta lei consiste em que :

Todo movimento é naturalmente rectilineo e uniforme ; isto é, todo corpo submettido á acção d'uma força unica qualquer que actua sobre elle instantaneamente, move-se constantemente em linha recta e com uma velocidade invariavel.

17. *Movimento rectilineo e uniforme.— Velocidade.—* Diz-se que um movimento rectilineo é uniforme, quando os espaços percorridos em intervallos de tempo iguaes são iguaes, quaesquer que sejam estes tempos.— Chama-se *velocidade*, n'este movimento, o espaço percorrido na unidade do tempo.

Seja v a velocidade d'um ponto material animado de movimento rectilineo e uniforme e s o espaço percorrido em t segundos. Resulta da definição dada, que v representa o numero de metros percorridos em um segundo ; portanto, $2v$

representará o numero de metros percorridos em dois segundos e $t\,v$ o numero de metros percorridos em t segundos. Logo

$$s = vt,$$

será a equação do movimento rectilineo e uniforme em que os espaços são contados a partir do ponto que corresponde a $t = o$. N'este caso, a origem dos tempos coincide na trajectoria com a origem dos espaços.

Seja agora supposto um movel animado de movimento uniforme e percorrendo a trajectoria rectilinea $x'x$ (fig. 1), com a velocidade v, sem que haja partido do ponto O', tomado para origem dos espaços. Designemos por s_o o *espaço inicial* $O'O$, que separa, no instante inicial do movimento, em O, o movel M do ponto O'.

Seja s a distancia $O'M$ do movel M á origem O', em um tempo qualquer t. Teremos :

$$s = O'M = O'O + OM = s_o + vt;$$

portanto,

$$s = s_o + vt,$$

será a equação do movimento.

Si a origem dos tempos O coincidisse com a dos espaços O', teriamos:

$$s_o = O'O = o;$$

d'onde, substituindo este valor na equação precedente, virá:

$$s = vt,$$

equação já estabelecida.

Si o movel, em logar de percorrer a sua trajectoria no sentido Ox, caminhasse em sentido contrario Ox', a sua velocidade seria negativa.

Para acharmos o tempo em que o movel passa pela origem dos espaços, no seu movimento de O para x', basta fazermos na equação geral

$$s = s_o + vt,$$

a hypothese de $s = o$. Teremos :

$$o = s_o + vt \ ;$$

d'onde,

$$t = -\frac{s_0}{v}.$$

A constante v suppõe sempre a escolha de duas unidades, a de comprimento e a de tempo. Nas equações do movimento, por causa da lei da homogeneidade, a variavel que designa o tempo é sempre considerada como um numero abstracto.

As velocidades são avaliadas em metros lineares e os tempos em segundos sexagesimaes de tempo médio, como já dissemos ; mas, podemos facilmente mudar de unidades. Supponhamos, por exemplo, que um movel percorra 50 kilometros por hora. Teremos:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{50.000}{60 \times 60} = \frac{50.000}{3.600} = 13^m,88.$$

Tal seria a velocidade em metros por segundo de tempo.

18. A equação geral do movimento rectilineo e uniforme

$$s = s_o + vt$$

encerra as constantes s_o e v e as variaveis s e t. Para determinarmos estas duas constantes de um movimento, precisamos conhecer as posições do movel em dois instantes dados. Si, por exemplo (fig. 1), 4 segundos depois do instante inicial, a distancia do movel M' á origem dos espaços O' é $2^m,80$; si 7 segundos, depois do instante inicial, a distancia do

movel M'' á origem O' é $1^m,60$, no mesmo sentido: a equação precedente nos dará as duas equações seguintes:

$$2,80 = s_o + 4\ v,$$

$$1,60 = s_o + 7\ v\ ;$$

d'onde, resolvendo-as, teremos:

$$s_o = 4^m,40,\ v = -\ 0^m,40\ ;$$

isto é, que, no instante inicial do movimento, o movel acha-va-se a $4^m,40$ da origem dos espaços, do lado $O'x$ adoptado para o sentido positivo, mas que dirigia-se em sentido opposto com uma velocidade de $0^m,40$ por segundo. O instante em que o movel passa pela origem dos espacos O' será determinado pela hypothese de $s = o$ na equação do movimento. Teremos :

$$t = -\ \frac{s_o}{v} = -\frac{4,40}{-0,40} = +\ 11^s\ ;$$

isto é, que 11 segundos depois do instante inicial é que o movel acha-se em O', origem dos espaços.

19. Considerando os movimentos de differentes moveis, animados de velocidades constantes, teremos, para cada um d'elles, uma equação e estas equações poderão nos fornecer todas as circumstancias do movimento de cada um dos mesmos moveis. Sejam, por exemplo, os problemas seguintes:

Dois moveis M e M', animados das velocidades v e v', acham-se distantes entre si de e_o metros quando $t = o$: em que tempo t elles serão distantes um do outro de b metros ?

As equações dos dois movimentos serão :

$$e = vt,\ e' = e_0 + v'\ t'.$$

São condições do problema :

$$t = t', \; e - e' = b \; ;$$

mas, tambem devemos ter :

$$e' - e = b \; ;$$

então, o problema terá duas soluções, uma antes e outra depois do ponto de encontro.

Reunindo estes dois casos, teremos :

$$t = t', \; e - e' = \pm b.$$

Portanto, as equações do movimento serão :

$$e = vt, \; e' = e_0 + v' t, e - e' = \pm b \; ;$$

d'onde,

$$t = \frac{e_0 \pm b}{v - v'},$$

será a expressão do valor do tempo procurado. Quaes serão os caminhos percorridos ?

$$e = vt = v . \frac{e_0 \pm b}{v - v'}, \; e' = e_0 + v't = \frac{e_0 v \pm b v'}{v - v'}.$$

Si $b = o$, evidentemente teremos o encontro dos dois moveis. N'este caso,

$$e - e' = o \; ;$$

d'onde,

$$t = \frac{e_0}{v - v'}, \; e = e' = \frac{e_0 v}{v - v'}.$$

20. Sejam v e v' as velocidades constantes de dois moveis : em que tempo t elles terão entre si a distancia

de b metros, sabendo-se que o segundo movel distava de ε metros, da origem, no fim do tempo τ?

Si, como no problema precedente, e e e' designam os espaços percorridos e e_0 o espaço inicial, teremos as seguintes equações para a solução procurada :

$$e - e' = \pm b, \; e = vt, \; e' = e_0 + v't, \; \varepsilon = e_0 + v'\tau;$$

d'onde,

$$t = \frac{\varepsilon - v'\tau \pm b}{v - v'}.$$

Comparando esta expressão do valor de t com a expressão achada para esta variavel no problema anterior, vemos que os dois problemas são analogos, sendo que o primeiro é um caso particular do segundo; pois é bastante que em logar de e_0 substituamos, nas formulas deduzidas para a solução do primeiro problema, o binomio $\varepsilon - v'\tau$.

21. *Imagem graphica da lei do movimento uniforme.*— A lei do movimento uniforme é representada por uma linha recta.

1.º Seja a equação $s = vt$. Fazendo $t = o$, resulta $s = o$: o que nos mostra que a origem dos tempos é tambem a dos espaços percorridos pelo movel.

Supponhamos agora (fig. 2) que, para

$$t = Oa, \; s = Aa;$$

para

$$t = Ob, \; s = Bb;$$

para

$$t = Oc, \; s = Cc;$$

e assim por diante.

Em virtude da definição do movimento uniforme, teremos :

$$\frac{Aa}{Oa} = \frac{Bb}{Ob} = \frac{Cc}{Oc} = \text{etc.},$$

proporções que, por terem logar, mostram que os triangulos AOa, BOb, COc,... são semelhantes entre si ; portanto, os angulos AOa, BOb, COc, etc., são iguaes entre si e os pontos A, B, C, D, etc., estarão em linha recta. Esta recta será a imagem graphica da lei do movimento uniforme : ella toma o nome de *linha dos espaços* do movimento uniforme.

2.º Seja a equação $s = s_0 + vt$. Fazendo $t = o$, resulta $s = s_0$: o que nos mostra que a origem dos tempos não é a mesma que a dos espaços percorridos pelo movel. Tiremos pelo ponto A uma parallela ao eixo dos tempos e seja $s_0 = AO$. Supponhamos agora (fig. 3) que, para

$$t = AB', \; s = BB' \;;$$

para

$$t = AC', \; s = CC' \;;$$

para

$$t = AD', \; s = DD' \;;$$

e assim successivamente.

Em virtude da definição do movimento uniforme, teremos :

$$\frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'} = \frac{DD'}{AD'} = \text{etc.},$$

proporções que nos mostram que a lei do movimento é graphicamente representada por uma recta AD, tirada por um ponto A distante d'uma quantidade AO da origem dos tempos.

22. Os triangulos semelhantes BAB', CAC', DAD', etc., deram-nos as proporções seguintes:

$$\frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'} = \frac{DD'}{AD'} = etc.;$$

d'onde

$$\frac{Bb - B'b}{Ob} = \frac{Cc - C'c}{Oc} = \frac{Dd - D'd}{Od} = etc.;$$

ou

$$\frac{Bb - s_0}{Ob} = \frac{Cc - s_0}{Oc} = \frac{Dd - s_0}{Oc} = etc.$$

Examinando estas relações, vê-se que ellas traduzem a proporcionalidade entre os espaços percorridos pelo movel e os differentes tempos gastos em percorrel-os; d'onde, sendo v a velocidade, teremos:

$$\frac{Bb - s_0}{Ob} = v;$$

mas, tambem

$$\frac{Bb - s_0}{Ob} = \frac{BB'}{AB'} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha;$$

d'onde,

$$v = tg\ \alpha;$$

iste é, que *a velocidade d'um movimento uniforme é dada pela tangente do angulo que a recta representativa da lei do movimento faz com o eixo dos tempos.*

23. Si tomarmos AB' igual á unidade de tempo, o valor da velocidade será representado simplesmente por BB'. D'aqui resulta o meio de representar graphicamente o valor

da velocidade d'um movimento uniforme, sobre a linha representativa do mesmo movimento. Para isto, a partir d'um ponto qualquer A d'esta linha, trace-se uma recta AB' parallela ao eixo dos tempos e igual á grandeza que representa a unidade de tempo; depois tire-se pelo ponto B' uma parallela ao eixo dos espaços, até encontrar no ponto B a linha AD que representa a lei do movimento. A linha $B'B$ representará o valor absoluto da velocidade do movimento, isto é, representará o espaço percorrido na unidade de tempo.

Poderiamos tambem querer construir a *linha representativa das velocidades* d'um movimento uniforme. Para isto, conhecida a grandeza constante da velocidade BB', como vimos de fazer, basta que pelo ponto B tiremos uma parallela BQ ao eixo sobre o qual tomamos os valores do tempo como abscissas, pois todas as velocidades serão iguaes a BB'.

Em resumo, a representação graphica da lei dada pela equação de movimento $s = s_0 + vt$ é uma linha recta, que se chama *a linha dos espaços*. O coefficiente angular d'esta recta é representado pela velocidade v e a sua ordenada á origem é representada pela velocidade inicial s_0. *A linha das velocidades* é tambem uma recta, mas de direcção parallela ao eixo dos tempos.

24. *Forças instantaneas e continuas, activas e passivas.*—Diz-se que uma força é *instantanea* quando actúa sobre o movel sómente no instante inicial do movimento, abandonando-o a si mesmo desde que elle começa a mover-se. São consideradas como si fossem forças instantaneas as *impulsões* ou movimentos que um corpo dá a outro pelo choque. As forças que não são consideradas como instantaneas chamam-se *continuas*: são as forças que actuam continuamente sobre o movel em toda a duração do movimento, taes como a gravidade, por exemplo.

Chamam-se *activas* as forças *reaes* ou *imaginadas*, já definidas. São forças *passivas* as resistencias produzidas pelas pressões dos corpos, as tensões dos fios ou das hastes, etc.,

cujo effeito é de conservar os corpos em uma mesma situação respectiva e de impedir que as ligações do systema sejam alteradas.

25. *Inducção de Carnot.*— A lei de Kepler é sempre relativa a potencias activas, instantaneamente impressas aos corpos.

As forças passivas não produzem movimentos, mas modificam o effeito das forças activas. E' assim, por exemplo, que, si um ponto material, sob a acção d'uma força dada, é obrigado a mover-se sobre uma superficie espherica, a pressão que elle exerce sobre a superficie dá logar a uma resistencia por parte d'esta superficie, resistencia esta que necessariamente modifica a acção da força que solicita o dito ponto. Por este simples exemplo, vemos claramente que as leis da composição dos movimentos não poderão ser convenientemente estabelecidas sem que se saiba apreciar devidamente o effeito d'uma força qualquer.

E como a lei de Kepler nos ensina que as acções activas e instantaneas produzem movimentos rectilineos e uniformes, precisamos saber como se regulam os effeitos das forças passivas. Então, sentimos a necessidade d'uma inducção que venha juntar-se á lei de Kepler, para que possamos estudar completamente a acção d'uma força unica qualquer.

Relativa sómente á *direcção* das forças passivas é a lei induzida por Carnot, no phenomeno do choque. Consiste esta lei em que *toda resistencia opposta por uma superficie dada a um corpo em repouso sobre a mesma superficie é sempre dirigida segundo a normal respectiva a cada ponto de contacto*. Tal é o complemento da lei de Kepler.

2. LEI DE GALILEO

26. Galileo, o principal fundador da dynamica, concebeu a segunda lei geral dos movimentos de translação, conhecida pelo nome de *lei da independencia ou da*

coexistencia dos movimentos, inducção que fez nos termos seguintes:

«Eu concebo pelo pensamento um movel lançado sobre um plano horizontal: toda resistencia sendo supprimida, o movimento ficaria perpetuamente uniforme si o plano fosse indefinido; mas, si este plano é limitado, desde que o movel chega ao limite, é submettido á gravidade; e, então, elle ajunta, a seu precedente e perduravel movimento, aquelle a que é propenso por sua propria gravidade; d'onde resulta um movimento composto d'um movimento uniforme e do movimento naturalmente accelerado.»

Da facil comprehensão d'este valioso exemplo historico, resulta que, *si um movel é animado de duas translações ao mesmo tempo, ellas coexistirão espontaneamente, combinando-se sem perturbação, cada uma se effectuando como si a outra cessasse*. (A. Comte.)

No exemplo com que começamos a exposição d'esta lei, vemos claramente que os dois movimentos da bola se effectuariam da mesma maneira si mesmo a experiencia tivesse logar n'um caminho de ferro cujo comboio fosse transportado d'um modo qualquer.

Esta translação dada ao comboio em nada prejudicaria os dois movimentos da bola, o movimento devido ao impulso inicial, instantaneamente impresso, e o movimento devido á acção da gravidade.

Considerada, portanto, com a maxima generalidade, a inducção de Galileo consiste precisamente em que as translações parciaes de corpos quaesquer d'um systema se harmonisam espontaneamente com qualquer translação dada ao conjuncto. Ou então, as translações quaesquer d'um systema de corpos não modificam absolutamente o estado relativo de repouso ou movimento em que possam achar-se os ditos corpos: este estado de repouso ou movimento continúa a manifestar-se como si o conjuncto do systema fosse immovel.

No estado actual dos nossos conhecimentos, todos acceitam, sem objecção, *uma tal coexistencia*: pretender explical-a, será eternamente um «mysterio impenetravel».

A demonstração d'esta grande lei da mecanica consiste simplesmente na observação dos phenomenos naturaes que espontaneamente ella explica.

E' claro e evidente que, si a inducção de Galileo é um dos fundamentos da mecanica, não póde ser demonstrada pelo simples raciocinio: si isto pudesse acontecer, a mecanica geral ainda hoje não estaria fundada.

E foi exactamente por causa do raciocinio, que a historia registra o immenso periodo de 18 seculos, entre Archimedes e Galileo, completamente esteril para a sciencia: era o raciocinio que impedia o espirito humano de observar os mais vulgares phenomenos, a simples queda d'um grave. E' pela observação sómente que poderemos verificar a realidade da inducção de Galileo, que se manifesta aos nossos olhos sob modalidades diversas.

Para citarmos um primeiro exemplo em que fique bem clara a conciliação entre o movimento do conjuncto e os movimentos parciaes, supponhamos que um passageiro d'um trem de ferro, cuja marcha seja de 10 metros por segundo, atire verticalmente uma bola e que esta chegue á altura de cinco metros. Elle receberá em suas mãos a dita bola, no fim de dois segundos, como receberia si o trem estivesse parado. A velocidade do trem sendo commum ao passageiro e á bola, não altera os movimentos d'esta em relação ao passageiro: estes movimentos de ascensão e queda do grave se realisam como si o trem não estivesse em marcha.

O marinheiro que do topo do mastro d'um navio, cuja marcha se effectue sem oscillações, faça cahir um grave sob a acção unica do seu proprio peso, verá o grave cahir ao pé do mastro, como cahiria si o navio estivesse immovel. O grave, ao mesmo tempo que cahe sob os impulsos da gravidade, acha-se animado do movimento de translação commum a todos os pontos do navio.

Qualquer que seja a objecção feita á falta de coexistencia entre o movimento commum e os movimentos parciaes, devemos sempre attribuil-a aos movimentos de rotação do systema e nunca aos seus movimentos de translação. Com effeito,

a lei de Galileo exige que o movimento do systema seja sómente de translação, pois as rotações necessariamente modificam as direcções e as velocidades dos movimentos dos differentes pontos materiaes do mesmo systema : as direcções coincidirão com as das differentes tangentes aos circulos respectivamente descriptos pelos mesmos pontos; e as velocidades variarão de ponto a ponto com a grandeza das respectivas distancias ao eixo de rotação. A translação d'um relogio de fragil mecanismo, sob o impulso d'uma força de intensidade qualquer, não alteraria as posições relativas de suas differentes partes; ao passo que uma pequena rotação poderia desarranjal-o completamente.

Tambem, só por circumstancias especiaes e precisas é que poderemos observar translações que não sejam acompanhadas de rotações, ao mesmo tempo.

27. Antes de applicarmos a lei de Galileo, figuremos geometricamente um dos exemplos citados. Seja A (fig. 4) a bola atirada ao ar pelo passageiro do trem de ferro, que marcha em uma direcção rectilinea Ax com a velocidade de 10 metros por segundo. Ella vai animada de dois movimentos unicos: do movimento impresso pelo atirador e do movimento do trem. Em virtude da lei de Galileo, estes dois movimentos se combinarão sem perturbação, cada um effectuando-se como si o outro cessasse. Portanto, a bola tendo chegado ao ponto B e esgotando o movimento impresso, descreverá então o caminho BD igual a AC, que mede a grandeza do movimento do trem durante o tempo de subida e descida da bola.

Assim, ella chegará ao ponto D que pertence á diagonal AD, diagonal realmente percorrida pela bola. Eis porque o passageiro, que tambem tem percorrido o espaço AC de 20 metros, nos dois segundos, receberá a bola em suas mãos no ponto C, ponto que pertence ao lado DC do parallelogrammo. Este lado DC é descripto, na queda do grave, em sentido opposto ao da subida AB, conforme a figura indica.

28. *Parallelogrammo das translações.*— Si um ponto A (fig. 5) é animado d'um movimento rectilineo e uniforme

AB, ao mesmo tempo que a recta *AB* é animada d'um movimento rectilineo e uniforme *AC*, é claro que o movel *A* será ao mesmo tempo animado de dois movimentos de translação: do movimento *AB* e do movimento commum *AC*. E como estes dois movimentos coexistentes se devem combinar sem perturbação, cada um se effectuando como si o outro cessasse, é evidente que, esgotado o movimento *AB* no ponto *B*, a recta *AB* se deslocará ao longo de *AC* e descreverá o parallelogrammo *ABDC*, cujos lados *AB* e *BD* seriam separadamente descriptos pelo movel *A* e cuja diagonal *AD* elle percorrerá realmente no mesmo tempo. Tal é em que consiste o parallelogrammo das translações.

29. *Composição geometrica de movimentos uniformes.* — A lei de Galileo applicada ao caso do parallelogrammo, institue o principio fundamental da composição dos movimentos. Dando-nos a noção de *movimento composto*, introduz espontaneamente na sciencia as noções de *movimentos componentes* e *movimento resultante*. Aos primeiros chama-se tambem de *parciaes* ou *relativos*, ao ultimo chama-se de *total* ou *absoluto*. O principio do parallelogrammo das translações nos mostra que, sendo dados os movimentos *AB* e *AC* componentes, de um movel *A*, poderemos sempre, terminando o parallelogrammo, determinar o movimento resultante *AD*, representado em grandeza, direcção e sentido pela diagonal do mesmo parallelogrammo.

Por meio do principio fundamental do parallelogrammo, poderemos compôr em um movimento unico, resultante, um numero qualquer de movimentos componentes dados. Para isto, sejam (fig. 6) *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, etc., os movimentos que um ponto *A* poderia ter, sob a acção instantanea de um systema de forças dadas.

Compondo os dois movimentos *AB* e *AC*, resultará o movimento *Ac*; o qual sendo composto com o movimento *AD*, dará o movimento resultante *Ad*; o qual sendo composto com o movimento *AE*, dará o movimento resultante *Ae*. E assim por diante.

Ao polygono $A\dot{B}c\,de$ chama-se o *polygono das translações*.

No caso em que AB, AC, AD, AE, etc., são as velocidades dos movimentos uniformes considerados, a composição faz-se do mesmo modo que a dos movimentos e o *polygono das velocidades* determinará a *velocidade resultante* Ae.

30. Esta resultante Ae é evidentemente a unica que se poderia obter; mas, si quizessemos resolver a questão inversa, a de determinar os movimentos componentes ou velocidades componentes, sem conhecer as suas direcções, é claro que o poderiamos fazer de uma immensidade de modos, porque infinito numero de polygonos poderia ser construido sobre uma recta dada Ae, differentes em numero, grandeza e direcção dos lados. O problema será, em geral, indeterminado.

31. Si imaginarmos que os dois lados AB e AC do parallelogrammo coincidem em direcção e sentido, os dois movimentos componentes darão um movimento resultante igual á sua somma; si coincidem em direcção sómente, o movimento resultante será igual á differença dos movimentos componentes e se effectuará no sentido do maior d'estes movimentos; e, finalmente, si coincidem em grandeza e direcção, mas são de sentidos oppostos, o movel ficará em repouso, pois neutralisam-se os movimentos componentes.

A composição geometrica dos movimentos simples poderá facilmente ser reduzida a formulas algebricas. E' o que vamos demonstrar.

32. *Composição algebrica de movimentos uniformes.* — Supponhamos (fig. 7) que um ponto A seja simultaneamente animado de dois movimentos rectilineos e uniformes, cujas direcções coincidem com as de dois eixos rectangulares AX e AY. Sejam as equações dos movimentos dados:

$$x = at\ ,\ y = bt.$$

Eliminando t, resultará a equação

$$y = \frac{b}{a}x,$$

que é a equação de uma linha recta que passa pela origem A e cujo coefficiente angular $\frac{b}{a}$ é a medida da tangente do angulo que a dita recta faz com o eixo dos x. Esta recta é a trajectoria do movimento.

A grandeza do espaço s percorrido pelo movel A sobre a sua trajectoria, em um tempo qualquer t, será:

$$s = AD = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{b^2t^2 + a^2t^2} = t\sqrt{a^2 + b^2},$$

em virtude da lei do parallelogrammo e por serem $x = at$ e $y = bt$ os dois movimentos dados.

A equação do movimento resultante,

$$s = t\sqrt{a^2 + b^2},$$

nos mostra que elle é um movimento uniforme. Para termos a velocidade d'este movimento, façamos $t = 1$, n'essa equação e virá:

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

A direcção do movimento é a mesma que a da trajectoria. Para o provarmos, sejam α e β os angulos que AD faz respectivamente com os eixos coordenados.

Teremos

$$AC = AD \cos\alpha, \quad AB = AD \cos\beta;$$

d'onde

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{at}{t\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{AB}{AD} = \frac{bt}{t\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Por ser

$$\alpha = 90 - \beta,$$

teremos

$$sen\ \alpha = cos\ \beta\ ;$$

d'onde,

$$sen\ \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Portanto,

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{b}{a},$$

ou

$$tg\ \alpha = \frac{b}{a},$$

valor da tangente do angulo que a trajectoria do movimento faz com o eixo dos x, conforme dissemos.

33. Sejam agora os tres movimentos rectilineos e uniformes dirigidos segundo tres eixos rectangulares fixos no espaço AX, AY, AZ e definidos pelas equações :

$$x = at\ ,\ y = bt\ z = ct\ ,$$

em que as constantes a, b, c são as velocidades dos movimentos. Pela eliminação do tempo t, resultarão as equações

$$x = \frac{a}{c} \cdot z\ ,\ y = \frac{b}{c} \cdot z\ ,$$

que definem em relação aos mesmos eixos a trajectoria do movimento. E' uma linha recta que passa pela origem das coordenadas, cujas projecções sobre os planos dos $x\ z$ e dos $y\ z$ fazem respectivamente com o eixo do z angulos dados pelas tangentes

$$\frac{a}{c}\ e\ \frac{b}{c}.$$

A grandeza do espaço s percorrido pelo movel A sobre a sua trajectoria, em um tempo qualquer t, será

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a^2\, t^2 + b^2\, t^2 + c^2\, t^2} = t\sqrt{a^2\ b^2 + c^2},$$

em virtude de ser s a diagonal do parallelipipedo rectangulo construido sobre as tres arestas x, y, z, coordenadas d'um ponto qualquer da trajectoria. A este parallelipipedo somos levados pela composição directa dos movimentos, segundo a regra do parallelogrammo.

Para isto, primeiro compomos o movimento x com o movimento y e obtemos um movimento resultante, situado no plano dos xy; depois, feita a composição binaria d'este movimento com o movimento z, resultará definitivamente o movimento total segundo a diagonal do dito parallelipipedo.

A equação do movimento resultante

$$s = t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

nos mostra que elle é um movimento uniforme, composto dos movimentos dados. Para termos a velocidade resultante das tres velocidades componentes a, b, c, façamos na equação precedente $t = 1$. Virá :

$$v = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Chamando α, β, γ os angulos que a trajectoria do movimento faz respectivamente com os tres eixos coordenados, teremos:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

por serem x, y, z as projecções da diagonal s sobre os tres eixos coordenados. Estes angulos nos darão a direcção do movimento resultante.

34. Designando por v a velocidade do movimento resultante, teremos:

$$\cos\alpha = \frac{a}{v}, \quad \cos\beta = \frac{b}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{v};$$

d'onde,

$$a = v\cos\alpha, \; b = v\cos\beta, \; c = v\cos\gamma.$$

Estes valores da velocidade v d'um movimento uniforme segundo uma direcção dada, qualquer, nos mostram claramente que a dita velocidade póde ser sempre decomposta em tres velocidades a, b, c, segundo tres eixos rectangulares dados.

Portanto, si um movel A fosse simultaneamente animado de muitas velocidades dadas v, v', v'', etc., dirigidas de uma maneira qualquer no espaço, fazendo cada uma respectivamente, com tres eixos rectangulares fixos, angulos (α, β, γ,), (α', β', γ',), (α'', β'', γ''), etc., resultariam, segundo estes mesmos eixos, as velocidades compostas:

$$v\cos\alpha + v'\cos\alpha' + v''\cos\alpha'' + \text{etc.}$$
$$v\cos\beta + v'\cos\beta' + v''\cos\beta'' + \text{etc.}$$
$$v\cos\gamma + v'\cos\gamma' + v''\cos\gamma'' + \text{etc.}$$

Chamando V a velocidade resultante de todas as velocidades componentes dadas, teremos:

$$\left.\begin{aligned} V\cos\varphi &= v\cos\alpha + v'\cos\alpha' + v''\cos\alpha'' + \text{etc.} \\ V\cos\psi &= v\cos\beta + v'\cos\beta' + v''\cos\beta'' + \text{etc.} \\ V\cos\theta &= v\cos\gamma + v'\cos\gamma' + v''\cos\gamma'' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

φ, ψ, θ, designando os angulos que a direcção de V faz respectivamente com os eixos coordenados.

Elevando ao quadrado os dois membros d'estas tres equações, virá:

$$V^2(\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\theta) = (v\cos\alpha + v'\cos\alpha' \ldots\ldots)^2 + (v\cos\beta + v'\cos\beta' + \ldots\ldots)^2 + (v\cos\gamma + v'\cos\gamma' + \ldots\ldots)^2;$$

ou, por ser

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\theta = 1,$$

$$V^2 = (v\cos\alpha + v'\cos\alpha' + \ldots\ldots)^2 + (v\cos\beta + v'\cos\beta' + \ldots\ldots)^2 + (v\cos\gamma + v'\cos\gamma' + \ldots\ldots)^2. \quad (b)$$

Das tres equações (a) facilmente poderemos deduzir os valores de φ, ψ, θ, que dão a direcção da velocidade resultante V.

35. Por ser este valor de V uma funcção dos angulos (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, etc., póde-se suppôr que a grandeza da velocidade resultante não seja calculavel em funcção dos angulos que as velocidades componentes fazem entre si. Para mostrarmos que V póde tambem depender das grandezas das velocidades componentes e dos angulos que ellas fazem entre si, elevemos ao quadrado os polynomios entre parenthesis. Virá :

$$V^2 = v^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + v'^2 (\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma') + v''^2 (\cos^2 \alpha'' + \cos^2 \beta'' + \cos^2 \gamma'') + \ldots + 2 vv' (\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma') + 2 v'v'' (\cos \alpha' \cos \alpha'' + \cos \beta' \cos \beta'' + \cos \gamma' \cos \gamma'') + \ldots$$

E como são conhecidas as relações:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$
$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1,$$
$$\cos^2 \alpha'' + \cos \beta'' + \cos^2 \gamma'' = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = \cos (v, v'),$$
$$\cos \alpha' \cos \alpha'' + \cos \beta' \cos \beta'' + \cos \gamma' \cos \gamma'' = \cos (v', v''),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

teremos :

$$V^2 = v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots\ldots + 2 v v' \cos (v, v') + 2 v'v'' \cos (v', v'') + \ldots\ldots,$$

expressão em cujo segundo membro não se acham mais senão as velocidades componentes e os angulos que ellas formam entre si, respectivamente.

36. Si tres são as unicas velocidades dadas,

$$V^2 = v^2 + v'^2 + v''^2 + 2 v v' \cos (v, v') + 2 v' v'' \cos (v', v'') + 2 v' v'' \cos (v, v''),$$

é a expressão do quadrado da diagonal V do parallelipipedo das velocidades.

Si duas são as unicas velocidades parciaes,

$$V = \sqrt{v^2 + v'^2 + 2\, v\, v' \cos(v, v')},$$

é o valor da diagonal do parallelogrammo das velocidades dadas.

Si estas duas velocidades são perpendiculares entre si, a fórmula precedente reduz-se á:

$$V = \sqrt{v^2 + v'^2}.$$

Si as duas velocidades v e v' coincidem em direcção e sentido, teremos:

$$\cos(v, v') = 1,$$

e a velocidade resultante será:

$$V = \sqrt{v^2 + v'^2 + 2\, v\, v'} = \sqrt{(v + v')^2} = v + v';$$

isto é, que *a velocidade resultante é igual á somma das velocidades componentes.*

Si as duas velocidades v e v' são dirigidas segundo a mesma recta e são de sentidos oppostos, teremos:

$$\cos(v, v') = \cos 180^\circ \ldots = -1,$$

e a velocidade resultante será:

$$V = \sqrt{v^2 + v'^2 - 2\, v\, v'} = v - v';$$

isto é, que *a velocidade resultante é igual á differença das velocidades componentes e terá o sentido da maior.*

Si, finalmente, as duas velocidades v e v' coincidem em grandeza e direcção, mas são de sentidos oppostos, teremos:

$$v = v', \quad \cos(v, v') = -1,$$

e então a fórmula fundamental do parallelogrammo dá-nos:

$$V = \sqrt{2\, v^2 - 2\, v^2} = 0;$$

isto é, que *o movel A fica em repouso, por ser nulla a velocidade resultante.*

37. *Comparação das forças instantaneas.*— Feita a apreciação geral da composição dos movimentos, como emanando directamente da lei de Galileo, mostremos que os dois modos geraes que a sciencia possue para comparar os effeitos das forças instantaneas, *estatico e dynamico,* são ambos subordinados a simples casos particulares da mesma lei.

No parallelogrammo das translações, quando as velocidades componentes *são iguaes e contrarias,* o movel fica em repouso. E como a conclusão será inteiramente a mesma si em lugar das velocidades componentes considerarmos as forças instantaneas capazes de produzil-as, é claro que o equilibrio de duas impulsões iguaes e contrarias é uma simples consequencia da lei de Galileo. Assim, duas forças instantaneas são equivalentes entre si, quando, applicadas a um mesmo ponto material, em uma mesma direcção, mas em sentidos contrarios, equilibram-se ou neutralisam-se mutuamente. Uma força impulsiva é *dupla, tripla, quadrupla,* etc., d'outra força da mesma natureza quando equilibra a duas, tres, quatro, etc., forças iguaes a esta outra, actuando em sentido contrario. Tal é a comparação estatica das forças instantaneas.

Si agora suppuzermos que no parallelogrammo das translações as duas velocidades componentes *sejam iguaes e do mesmo sentido,* a grandeza da velocidade resultante será dupla da das velocidades componentes. E como a relação será inteiramente a mesma si em lugar das velocidades componentes considerarmos as forças instantaneas capazes de produzil-as, isto é, que a grandeza da impulsão resultante será dupla da das forças componentes, é claro que a proporcionalidade entre as forças instantaneas e as velocidades respectivas é outra simples consequencia da lei de Galileo.

Sejam, portanto, as duas velocidades componentes designadas por v e a velocidade resultante por V. O parallelogrammo dá-nos :

$$V = 2v.$$

E como esta relação será a mesma para com as forças instantaneas capazes de produzir as velocidades V e v, teremos, designando-as respectivamente por F e f,

$$F = 2f.$$

Logo

$$\frac{F}{f} = \frac{V}{v};$$

isto é, que as impulsões são directamente proporcionaes ás velocidades que imprimem a um mesmo corpo, n'uma mesma direcção e sentido e n'um mesmo instante. Tal é a comparação das forças instantaneas sob o ponto de vista dynamico.

38. *Representação das forças*.— As forças sendo proporcionaes ás velocidades, estas duas quantidades podem ser representadas uma pela outra e tudo o que estabelecemos precedentemente sobre a composição dos movimentos applica-se á composição das forças. Ellas tomaram a mesma representação geometrica das velocidades e ficam completamente definidas pelos quatro elementos seguintes : *ponto de applicação, intensidade, direcção* e *sentido*.

O ponto de applicação d'uma força instantanea é o ponto material do corpo que recebe directamente a acção da força ; a sua intensidade é a sua grandeza, ou o esforço que ella exerce sobre o corpo comparavel a uma unidade da mesma natureza ; a sua direcção é a da recta segundo a qual se moveria o seu ponto de applicação si elle fosse livre e sómente sujeito á acção d'essa força ; e o seu sentido é o da velocidade que ella produziria si este movimento se effectuasse.

39. *Mudança do ponto de applicação d'uma força*.— Seja F (fig. 8) uma força applicada em M e seja M' um ponto tomado sobre a sua direcção. Supponhamos que estes dois pontos sejam invariavelmente ligados entre si. No ponto M' appliquemos, na mesma direcção da força F,

duas forças $+F'$, $-F'$, iguaes e contrarias e iguaes á força F. E' claro que a consideração d'estas duas forças em nada modifica a acção da força F. Ora, as duas forças F e $-F'$ se destroem evidentemente, porque são iguaes e contrarias. Portanto, só restará a força F' que é igual á força F e acha-se applicada em M' : é como si o ponto M fosse mudado para um ponto qualquer M' da direcção da força F.

3. LEI DE NEWTON

40. A Isaac Newton, principalmente, devemos a inducção da terceira lei physica do movimento, esboçada anteriormente por Huyghens e Wallis. Formulada pelo digno fundador da mecanica celeste, esta lei consiste em que : *a acção é sempre igual e opposta á reacção ; isto é, que as acções de dois corpos um sobre o outro são sempre iguaes e em direcções contrarias.*

Dos innumeros exemplos que Newton deu de sua grande lei, são os mais simples os que se seguem :

« Todo corpo que comprime ou puxa um outro corpo é puxado ou comprimido por este outro. Si comprimimos uma pedra com o dedo, o dedo é comprimido ao mesmo tempo pela pedra. Si um cavallo puxa uma pedra por meio d'uma corda, elle é igualmente puxado pela pedra : porque a corda que os liga e que é estirada dos dois lados, faz um esforço igual para puxar a pedra para o cavallo e o cavallo para a pedra ; e este esforço se oppõe tanto ao movimento de um, como excita o movimento do outro. »

Esta lei, que rege a communicação dos movimentos entre dois corpos, quando encarados como pontos materiaes movendo-se segundo a mesma linha de direcção, foi por A. Comte enunciada assim : *todas as vezes que um corpo é movido por um outro, d'uma maneira qualquer, exerce sobre este outro, em sentido inverso, uma reacção tal, que o segundo perde, na razão das massas, uma quantidade de movimento exactamente igual á que o primeiro recebeu.*

Resulta d'este enunciado que a lei de Newton nos mostra a igualdade constante da reacção á acção, si cada uma d'estas *quantidades de movimento* é convenientemente medida.

Para que esta lei fundamental da mecanica possa, pois, ser devidamente instituida, precisamos completal-a, apreciando convenientemente esta noção auxiliar.

41. *Medida das forças instantaneas.* — Os dois modos geraes que regulam a comparação das impulsões, estatico e dynamico, são, como vimos, simples consequencias da lei de Galileo e só esta lei nos permitte explicar a necessaria ligação entre esses dois modos.

Pelo methodo dynamico sabemos que as impulsões são proporcionaes ás velocidades que produzem, quando actuam instantaneamente sobre uma mesma massa.

Basta agora que completemos esta regra, apreciando devidamente a influencia das differentes massas para a producção d'uma mesma velocidade.

E' um facto geral, de facil experiencia e inducção, que as forças instantaneas são sempre proporcionaes ás massas dos corpos a que imprimem respectivamente a mesma velocidade.

Assim, si as impulsões F, F', F'', etc., actuando as massas M, M', M'', etc., respectivamente, produzem a mesma velocidade v, no mesmo instante, é claro que

$$\frac{F}{M} = \frac{F'}{M'} = \frac{F''}{M''} = etc = v;$$

d'onde,

$$F = M\,v$$

Ao producto da massa d'um corpo pela sua velocidade em um instante dado, chama-se desde Newton *a quantidade de movimento* d'este corpo. E' a medida de todas as forças, activas ou passivas.

42. *Theoria do choque directo.* — Os corpos podem ser considerados abstractamente sob duas hypotheses extremas, verdadeiramente limites: como *inteiramente inelasticos* e como *perfeitamente elasticos.*

Todos os gráos de elasticidade que realmente caracterisam os corpos, não modificarão em nada a marcha que seguiremos no estudo d'esses dois casos ideaes e apenas modificarão as formulas respectivas, como mostraremos.

Um corpo seria inteiramente inelastico quando não se deformasse no choque, ou, quando deformando-se, não adquirisse a sua fórma primitiva.

Ao contrario, um corpo perfeitamente elastico seria o que, deformando-se pela compressão, retomasse exactamente a sua fórma primitiva desde que o choque cessasse.

Consideraremos primeiro o phenomeno do choque de corpos inelasticos, depois a elle reduziremos o de corpos elasticos.

Para maior simplicidade, supporemos que os corpos sejam esphericos e movem-se, sem attrito e resistencias quaesquer, sobre um plano horizontal e sobre uma mesma direcção. Tendo em vista sòmente o simples movimento de translação, devemos abstrahir dos seus movimentos de rotação.

43. Sejam (fig. 9) A e B os dois globos considerados. Supponhamos que m e m' sejam as respectivas massas. Sejam u e v as respectivas velocidades antes do choque e seja $X\,Y$ a linha de direcção dos dois moveis.

Tomemos as rectas $A\,D$ e $B\,D$ como proporcionaes ás velocidades u e v e supponhamos que o corpo A, cuja velocidade é maior que a do corpo B, caminhando no mesmo sentido, possa attingil-o. Qual será a velocidade dos dois corpos depois do choque?

O corpo A attingindo o corpo B o impellirá até que tenham a mesma velocidade.

Cessando a acção de A sobre B, os dois corpos proseguirão evidentemente com a mesma velocidade $C\,D$, como si constituissem uma só massa.

Em virtude da lei de Newton, a quantidade de movimento perdida por A, agindo sobre B, é exactamente igual á quantidade de movimento ganha por B, reagindo sobre A.

Representando por x a velocidade commum CD, que resulta depois do choque, teremos:

$$m(u-x)=m'(x-v)\text{; d'onde, } x=\frac{mu+m'v}{m+m'}.$$

O simples exame da figura nos mostra que, sendo CD a velocidade commum e AD e BD as velocidades primitivas, o movel A perde a velocidade AC e o movel B ganha a velocidade BC. Representando estas velocidades AC e BC por u' e v', teremos:

$$u'=u-x=u-\frac{mu+m'v}{m+m'}=\left(\frac{u-v}{m+m'}\right)m',$$

$$v'=x-v=\frac{mu+m'v}{m+m'}-v=\left(\frac{u-v}{m+m'}\right)m.$$

44. Os mesmos corpos A e B caminhando em sentidos oppostos n'uma mesma recta XY, terão as suas velocidades primitivas representadas com signaes contrarios. D'onde, na fórmula da velocidade commum x, mudando v em $-v$, teremos:

$$x=\frac{mu-m'v}{m+m'}.$$

Tomando o ponto D entre os pontos A e B (fig. 10), sendo CD a velocidade commum, AD e BD as velocidades primitivas, vê-se facilmente que o movel A perde a velocidade AC e o movel B ganha a velocidade BC. D'onde

$$u'=u-x=\left(\frac{u+v}{m+m'}\right)m', \qquad v'=x+v=\left(\frac{u+v}{m+m'}\right)m.$$

Taes são os valores das velocidades perdida e ganha.

45. Estudado o caso de choque directo dos corpos inelasticos, problema que Wallis foi o primeiro a resolver,

passemos ao caso primitivamente apreciado por Huyghens e Wren, isto é, o dos corpos elasticos.

Sejam suppostos elasticos os globos A e B que acabamos de considerar como inelasticos. A elasticidade è uma propriedade physica segundo a qual um corpo no choque sobre um plano fixo, por exemplo, retomará em sentido contrario, depois do choque, uma velocidade igual á que perdeu pela compressão.

Ha, portanto, dois periodos distinctos a considerar : um de *compressão mutua* e outro de *reacção propria* em que cada corpo voltará gradualmente á sua primitiva fórma e passará, mas em sentido inverso, por todos os estados por que tinha passado durante o primeiro periodo. O corpo A tinha perdido durante o periodo da compressão a velocidade $(u\text{-}x)$; elle perderá durante o segundo periodo, sob a reacção exercida pelo corpo B, uma velocidade igual á $(u\text{-}x)$, de modo que perderá a velocidade $2\,(u\text{-}x)$, dupla da que teria perdido si fosse inelastico. O corpo B tinha ganho durante o primeiro periodo uma velocidade $(x\text{-}v)$; elle ganhará durante o segundo periodo, sob a reacção exercida pelo corpo A, uma velocidade igual a $(x\text{-}v)$, de sorte que ganhará a velocidade $2\,(x\text{-}v)$, dupla da que teria ganho si fosse inelastico. D'onde, si A e B movem-se no mesmo sentido, as velocidades perdida e ganha por estes dois globos serão, respectivamente,

$$u'' = 2\left(\frac{u - v}{m + m'}\right) m', \qquad v'' = 2\left(\frac{u - v}{m + m'}\right) m.$$

Chamando y e z as velocidades de A e B depois do choque, teremos :

$$y = u - u'' = u - 2\left(\frac{u - v}{m + m'}\right) m',$$

$$z = v + v'' = v + 2\left(\frac{u - v}{m + m'}\right) m.$$

Na fig. 9, tomando um ponto E, de modo que a distancia EC seja igual a CD, facilmente se terá uma imagem geometrica d'este caso. A velocidade primitiva do globo A é representada por AD e do globo B por BD. As suas velocidades finaes, ou de depois do choque, serão, respectivamente, EA e EB. Com effeito, o corpo A era animado da velocidade AD e por causa da compressão perdeu a velocidade AC; e sendo EC igual a CD, teremos: $AD - AC = CD = EC$. Si de EC tiramos ainda a velocidade AC que este corpo perde por causa da restituição de sua elasticidade, ficará EA para grandeza da velocidade final.

Quanto ao corpo B, que se achava animado antes do choque da velocidade BD, ganhou por causa da compressão a velocidade BC.

Portanto, teremos: $BD + BC = CD = EC$. Si a esta somma EC addicionarmos ainda uma velocidade igual a BC, por causa da restituição da elasticidade d'este corpo B, teremos: $EC + BC = EB$. Tal é a grandeza da velocidade final do corpo B.

46. Suppondo agora que os dois moveis marcham em sentidos contrarios, bastará fazermos a simples mudança nas formulas precedentes de v por $-v$. Resultará:

$$u'' = 2\left(\frac{u+v}{m+m'}\right)m', \quad v'' = 2\left(\frac{u+v}{m+m'}\right)m$$

$$y = u - u'' = u - 2\left(\frac{u+v}{m+m'}\right)m', \quad z = -v + v'' = -v + 2\left(\frac{u+v}{m+m'}\right)m.$$

Na fig. 10, tomando um ponto E, de modo que a distancia EC seja igual a CD, vê-se facilmente que as velocidades finaes são representadas respectivamente por EA e EB. Com effeito,

$$AD - AC = CD = EC\ ;\ EC - AC = EA.$$

$$BD + CD = BC\ ;\ BC + CD = BC + EC = EB.$$

Evitamos os raciocinios, pois que são identicos aos que fizemos no caso em que os globos elasticos marcham no mesmo sentido.

47. Os valores de y e z, em todos os casos considerados, ficam contidos nas fórmulas seguintes:

$$y = u - n\left(\frac{u \mp v}{m + m'}\right)m', \quad z = \pm v + n\left(\frac{u \mp v}{m + m'}\right)m,$$

nas quaes o signal superior deve ser tomado quando os moveis marcham no mesmo sentido e o signal inferior quando movem-se em sentidos contrarios. Suppondo $n = 2$, ellas se referem aos corpos perfeitamente elasticos; e $n = 1$, ellas se referem aos corpos não elasticos: n'este caso, $y = z = x$. Finalmente, si os corpos possuem uma elasticidade imperfeita, n terá um valor médio comprehendido entre 1 e 2, necessariamente dado pela experiencia.

48. Muitos casos particulares do phenomeno do choque directo têm as suas soluções implicitamente contidas nas fórmulas estabelecidas, quer se trate de corpos inelasticos, quer de corpos elasticos. Para obtel-as, bastará fazermos hypotheses sobre os valores numericos das massas, das velocidades, ou das quantidades de movimento dos dois corpos, de accôrdo com as circumstancias particulares relativas ao caso que se tiver em vista.

Consideremos alguns casos particulares.

Supponhamos um dos globos inelasticos em repouso antes do choque. Seja o de massa m', por exemplo. A fórmula respectiva

$$x = \frac{mu + m'v}{m + m'},$$

dá-nos, por ser $v = o$,

$$x = \frac{mu}{m + m'},$$

quantidade necessariamente menor que u. Si v não é igual a zero, porém a massa m' é tão pequena em

relação a m, que póde ser considerada como si fosse nulla, teremos :

$$x = \frac{mu}{m} = u,$$

isto é, que o corpo chocante perderá apenas uma parte infinitamente pequena de sua velocidade, porque realmente a massa m' não póde ser nulla. Si, pelo contrario, a massa m do corpo chocante é muito pequena em relação a m' do corpo chocado, teremos :

$$x = \frac{m'v}{m'} = v,$$

isto é, que o corpo chocado perde apenas uma parte infinitamente pequena de sua velocidade, porque não poderá ser realmente nulla a massa do corpo chocante.

49. O choque directo de corpos elasticos nos apresenta o seguinte caso notavel :

Si as massas dos dois globos elasticos A e B são iguaes quer marchem no mesmo sentido ou em sentidos contrarios, os corpos mudarão, pelo choque, as suas velocidades primitivas. Com effeito, fazendo $m = m'$, as fórmulas respectivas dão-nos :

$$y = \pm v, z = u;$$

isto é, que a velocidade de A depois do choque é a que animava B antes do choque e reciprocamente.

Si, além da hypothese $m = m'$, tivermos $v = o$, as mesmas fórmulas darão :

$$y = o, \quad z = u;$$

isto é, que o corpo B anima-se com a mesma velocidade primitiva de A, emquanto que A fica em repouso.

D'este facto resultou a experiencia das bolas de marfim suspensas por fios de igual comprimento.

Suppondo um systema de bolas elasticas bem juxtapostas, e imprimindo-se um movimento á primeira, a ultima se

moverá instantaneamente com o movimento impresso e as demais ficarão em repouso.

Esta vulgar experiencia destina-se a provar a instantaneidade do choque e a exactidão da hypothese feita sobre a perfeita elasticidade dos corpos. Sem esta dupla circumstancia, não poderia ter logar a communicação successiva do movimento impresso.

E' o que nos basta dizer sobre o choque directo dos corpos solidos.

4. PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

50. A lei de Isaac Newton, induzida e verificada essencialmente no choque dos corpos, não póde immediatamente regular a communicação mutua dos movimentos nos systemas e só rege o caso extremamente simples em que dois corpos, considerados como pontos materiaes, chocam-se directamente segundo a linha recta em que se movem.

Esta lei poderia regular qualquer outro caso de communicação de movimentos, si pela decomposição das forças pudessemos decompol-o em acções e reacções exercidas por simples pontos materiaes precisamente n'aquellas condições; mas, uma tal decomposição não é sempre espontanea e a lei de Newton teve de ser generalisada. Só depois que D'Alembert systematisou o seu principio e indicou o meio de empregal-o nos problemas da dynamica dos systemas é que ficou completamente instituida a communicação dos movimentos.

Huyghens e principalmente Jacques Bernouilli forneceram a D'Alembert as bases necessarias a uma tal generalisação. A Jacques Bernouilli devemos definitivamente a solução do famoso problema proposto por Mersenne aos geometras de seu tempo sobre a determinação do centro de oscillação d'um pendulo composto, problema que constitue a génese do principio de D'Alembert ou lei geral da communicação dos movimentos.

Este problema historico, que tanto concorreu para a fundação da dynamica dos systemas, para que possa ser

convenientemente estudado, precisa ser precedido da *lei de equilibrio da alavanca*.

51. *Lei de equilibrio da alavanca.*— Em geral, chama-se *alavanca* a um solido invariavel de fórma qualquer, movel em torno d'um ponto fixo ou *ponto de apoio* e submettido á acção d'um numero qualquer de forças situadas n'um mesmo plano que passa por este ponto.

Para acharmos a condição de equilibrio d'uma alavanca inflexivel submettida á acção de duas forças situadas n'um mesmo plano passando pelo apoio, supponhamos (fig. 12) uma *alavanca quebrada* em equilibrio $A\ K\ B$, cujos braços $A\ K$ e $B\ K$ sejam perfeitamente iguaes e cujo ponto de apoio K seja fixo. Aos pontos A e B, extremos dos *braços* da alavanca, appliquemos, perpendicularmente ás direcções dos braços, duas forças iguaes P e P'. E' claro que as forças P e P' não perturbarão o estado de equilibrio da alavanca, porque si as mudassemos para o ponto D, commum ás suas direcções, e si as compuzessemos pela lei do parallelogrammo, teriamos uma resultante $D\ R$, que poderia ser transportada para o ponto K, cuja fixidez destruiria a acção d'esta mesma resultante. Portanto, as forças P e P' poderão agir nos pontos A e B, sem que o supposto equilibrio da alavanca $A\ K\ B$ seja perturbado.

Isto posto, mudemos o ponto de applicação da força P' de B para C, ponto commum ás direcções desta força e do prolongamento $K\ C$ do braço $A\ K$. Resultará que a força P', applicada em C, achar-se-ha em equilibrio com a força P, applicada em A. Agora, decomponhamos a força P', conforme a regra do parallelogrammo, em duas componentes $C\ Q'$ e $C\ Q$. A primeira, applicada na direcção de $A\ K$, será evidentemente destruida pela resistencia offerecida pelo ponto K. A segunda, perpendicular á alavanca rectilinea $A\ K\ C$, se achará em equilibrio com a força P, applicada em A.

Os triangulos semelhantes $C\ P'\ Q$ e $C\ K\ B$ dão-nos :

$$\frac{C\ P'}{C\ K} = \frac{C\ Q}{B\ K};$$

d'onde,

$$C\,P'.\,B\,K = C\,Q.\,C\,K;$$

e por ser

$$C\,P' = A\,P \text{ e } B\,K = A\,K,$$

teremos:

$$A\,P.\,A\,K = C\,Q.\,C\,K;$$

d'onde,

$$\frac{A\,P}{C\,K} = \frac{C\,Q}{A\,K}.$$

Designando por P e Q as forças $A\,P$ e $C\,Q$ e por p e q os braços da alavanca $A\,K$ e $C\,K$, a proporção precedente se mudará na seguinte:

$$\frac{P}{q} = \frac{Q}{p};$$

d'onde,

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p};$$

isto é, que *as duas forças, que se equilibram nos extremos dos braços d'uma alavanca recta, estão entre si na razão inversa dos comprimentos dos mesmos braços.* Tal é a lei de Archimedes.

Como o nosso intuito não é fazer o estudo da alavanca d'um modo completo como teriamos de fazel-o si a tivessemos definido como machina e sim deduzir a simples lei que se verifica no estado de seu equilibrio, nada mais accrescentaremos.

52. *Generalidades.* — Dá-se o nome de *pendulo simples* a um fio considerado como uma linha inflexivel sem peso e sem massa, ligado por uma extremidade a um ponto fixo e carregado no outro extremo d'um pequeno peso considerado como um ponto material. Diz-se que um pendulo é *composto* quando a haste é carregada de pequenos pesos ou d'um peso consideravel; ou quando, tendo massa sensivel, é ella carregada de um numero qualquer de pesos quaesquer.

Os pendulos compostos podem tambem ser formados por um systema de corpos ligados entre si e suspensos todos por hastes invariaveis a um mesmo ponto fixo.

Supponhamos que um pendulo simples esteja em repouso, e que, actuado por uma impulsão, começa a mover-se: diz-se então que o pendulo tem um movimento oscillatorio em torno de um eixo que passa pelo ponto de suspensão. A cada excursão completa que o pendulo faz chama-se uma *oscillação simples* ou simplesmente uma oscillação.

As oscillações d'um pendulo composto não têm a mesma duração que teria o movimento de qualquer um dos pesos particulares que o compõem, si este peso fosse só. A ligação dos pesos altera profundamente os movimentos respectivos a cada um d'elles, de modo que os moveis se perturbam em seus movimentos pela acção e reacção que exercem entre si.

Dissemos que Mersenne havia proposto aos geometras de seu tempo o problema da determinação do *centro da oscillação* de um pendulo composto. A importancia scientifica deste problema nos leva a fazer algumas considerações.

Si suppuzermos que muitos corpos invariavelmente ligados entre si oscillam em torno d'um eixo fixo horizontal, todos estes corpos se prejudicarão mutuamente em seus movimentos e não terão as mesmas velocidades que teriam si cada um delles oscillasse separadamente. Os corpos mais proximos do eixo perderão uma parte de suas velocidades e a transmittirão aos corpos mais afastados: haverá, portanto, um equilibrio entre as forças a que são devidos os movimentos perdidos e os movimentos ganhos. De qualquer modo que seja traduzido este equilibrio, existirá no systema de corpos considerados um ponto tal, que, si fosse isolado e suspenso ao mesmo eixo por um fio, oscillaria no mesmo tempo que o pendulo composto. D'onde resulta o problema da determinação do comprimento d'este fio ou da determinação da posição d'este ponto material, que é o que se chama o *centro da oscillação* do pendulo composto dado.

Huyghens foi o primeiro geometra que resolveu este problema de um modo geral e completo; mas serviu-se da *lei*

da conservação das forças vivas, que, por não ser de facil inducção, tornou contestada a solução dada.

Jacques Bernouilli a defendeu e propoz-se demonstral-a pelo principio da alavanca. Considerou primeiro dous pesos iguaes, ligados a uma haste inflexivel e sem peso, movel em torno de um eixo horizontal; e, observando que a velocidade do peso mais proximo do eixo de suspensão deve ser menor do que a velocidade que este mesmo peso teria si fosse separadamente ligado ao mesmo eixo e que, ao contrario, a velocidade do peso mais distante do eixo de suspensão deve ser maior do que seria si este peso fosse separadamente ligado ao mesmo eixo, concluiu que as forças perdida e ganha devem achar-se em equilibrio, isto é, que o producto da massa do primeiro peso pela velocidade que elle perde e o producto da massa do segundo peso pela velocidade ganha por este corpo devem ser inversamente proporcionaes aos braços da alavanca constituida pela haste invariavel que liga os dous pesos ao eixo da suspensão.

Este feliz raciocinio de Jacques Bernouilli, quando traduzido algebricamente, devia conduzil-o logo á espontanea solução do problema, mas o geometra enganou-se. Considerou as velocidades dos dous corpos como finitas, quando devia suppol-as infinitamente pequenas e comparal-as com os impulsos elementares produzidos em cada instante pela gravidade. O Marquez de l'Hôpital rectificou a solução de Jacques Bernouilli sem introduzir consideração nova e baseando-se no principio da alavanca.

Jacques Bernouilli em 1703, revendo a sua primeira solução, simplificou-a e generalisou-a para um caso qualquer, quaesquer que fossem o numero e a posição dos corpos elementares do systema considerado.

Nós nos limitarem̃os á apreciação do caso mais simples do problema, o caso do pendulo sòmente composto de dous pontos materiaes invariavelmente ligados, gyrando em torno d'um eixo horizontal, em um mesmo plano vertical, por ser este o typo mais simples da alteração que a ligação de dous moveis produz nos respectivos movimentos.

53. *Problema.— Determinar o comprimento d'um pendulo simples cujas oscillações sejam synchronas das de um pendulo composto de dous pesos dados:*

Seja A (fig. 13) o ponto de intersecção do eixo horizontal de suspensão com o plano vertical $X A Y$.

Sejam C e D dous pontos materiaes de massa m, situados no plano vertical, ligados invariavelmente pela haste $C D$ e ligados ao centro de suspensão A pelas hastes $A C$ e $A D$, tambem invariaveis. Supponhamos que os pontos C e D descrevam em suas oscillações os arcos $C R$ e $D S$ e seja $A M$ o comprimento do pendulo simples de massa m que oscilla no mesmo tempo que o pendulo composto considerado. Designemos por $M N$, $C O$ e $D P$ as velocidades devidas ao impulso da gravidade respectivamente sobre os pesos M, C e D, em cada instante e supponhamol-as iguaes á unidade; velocidades estas que teriam effectivamente logar si os moveis fossem separadamente ligados ao eixo de suspensão.

Decomponhamos, pela regra do parallelogrammo, cada uma d'estas velocidades em duas outras: uma segundo a haste de suspensão e outra segundo a tangente á trajectoria. Resultarão assim as velocidades $M M'$ e $M K$, $C C'$ e $C T$, $D D'$ e $D V$. As primeiras ou antes as forças que as produziram, $M M'$, $C C'$ e $D D'$, poderão ser todas mudadas para o centro de suspensão A, cuja fixidez as neutralisará completamente. Assim as velocidades $M K$, $C T$ e $D V$ terão sómente logar. Mas, quando o movel M houver chegado ao ponto K, os moveis C e D terão chegado respectivamente aos pontos R e S, por causa do supposto isochronismo. D'onde o movel C tem perdido a velocidade $R T$ e o movel D terá ganho a velocidade $S V$. De sorte que eis uma alavanca quebrada $C A D$, sobre a qual os moveis C e D actuam por suas quantidades de movimento $m R T$ e $m S V$. Designando as hastes $C A$ e $D A$, respectivamente por c e d, teremos, em virtude da lei do equilibrio da alavanca, a proporção seguinte:

$$\frac{m\ R\ T}{m\ S\ V} = \frac{d}{c},$$

ou simplesmente

$$\frac{R\,T}{S\,V} = \frac{d}{c};$$

d'onde,

$$c.\ R\,T = d\,S\,V.$$

Por ser

$$R\,T = C\,T - C\,R$$
$$S\,V = D\,S - D\,V,$$

a nossa equação de equilibrio será:

$$c\,(C\,T - C\,R) = d\,(D\,S - D\,V). \quad (a)$$

Isto posto, façamos:

$M\,K = b$, $C\,L = L\,D = k$, $H\ L\ C = \theta$, $A\,L = a$ e $A\,M = l$.

Os triangulos semelhantes $C\,O\,T$ e $A\,C\,G$ dão-nos:

$$\frac{C\,T}{A\,G} = \frac{C\,O}{c};$$

d'onde, por ser $C\,O = 1$,

$$C\,T = \frac{A\,G}{c}$$

Evidentemente,

$$AG = AH + HG = AH + BC.$$

Os triangulos semelhantes MNK e ALH dão-nos:

$$\frac{A\,H}{b} = \frac{a}{MN}$$

d'onde, por ser $MN = 1$,

$$AH = ab$$

O triangulo CBL dá-nos:

$$BC = k\ sen\ \theta.$$

Portanto,

$$AG = ab + k\ sen\ \theta$$

$$CT = \frac{ab + k\ sen\ \theta}{c}. \quad (b)$$

Dos triangulos semelhantes DVP e AIP tiramos:

$$\frac{DV}{AI}=\frac{DP}{d}$$

d'onde, por ser $DP=1$,

$$DV=\frac{AI}{d}.$$

Evidentemente,

$$AI=AH-HI=AH-HG=AH-BC=$$
$$=ab-k\ sen\ \theta.$$

Portanto,

$$DV=\frac{ab-k\ sen\ \theta}{d}. \qquad (c)$$

Por serem isochronas as oscillações de M, C e D, teremos:

$$\frac{CR}{b}=\frac{c}{l}, \qquad \frac{DS}{b}=\frac{d}{l};$$

d'onde,

$$CR=\frac{bc}{l}, \qquad DS=\frac{bd}{l}. \qquad (d)$$

Substituindo os valores (b), (c) e (d) na equação (a), teremos:

$$c\left(\frac{ab+k\ sen\ \theta}{c}-\frac{bc}{l}\right)=d\left(\frac{bd}{l}-\frac{ab-k\ sen\ \theta}{d}\right)$$

d'onde,

$$ab+k\ sen\ \theta-\frac{bc^2}{l}=\frac{bd^2}{l}-ab+k\ sen\ \theta,$$

ou, reduzindo e simplificando,

$$2\,al=c^2+d^2.$$

Os triangulos ALC e ALD dão-nos :

$$c^2 = a^2 + k^2 - 2\ ak\ cos\ (a,\ k),$$
$$d^2 = a^2 + k^2 + 2\ ak\ cos\ (a,\ k)\ ;$$

portanto,

$$c^2 + d^2 = 2\ (\ a^2 + k^2\ ).$$

Logo,

$$2\ al = 2\ (\ a^2 + k^2\ )\ ;$$

d'onde,

$$l = \frac{a^2 + k^2}{a} = a + \frac{k^2}{a}\ .$$

Tal é o valor do comprimento do pendulo simples procurado.

54. A este caso fundamental, podemos gradualmente referir os pendulos compostos de um numero qualquer de pesos.

Com effeito, si tivessemos um systema de tres pesos C, D, E invariavelmente ligados entre si e ligados do mesmo modo ao centro de suspensão A, procederiamos da maneira seguinte :

Determinariamos primeiro o centro M de oscillação dos pesos C e D, como vimos de fazer ; depois, passariamos a determinar o centro M' de oscillação dos pesos M e E, pela mesma regra.

Si o systema fosse composto de quatro pesos ou mais, é claro que sempre empregando a regra fundamental chegariamos a obter o centro de oscillação do mesmo systema.

55. Foi em 1742 que D'Alembert generalisou a concepção de Jacques Bernouilli.

O seu classico *Tratado de Dynamica*, publicado em 1743, contém o enunciado e importantes applicações da lei geral que rege a communicação mutua dos movimentos de um systema de corpos quaesquer ligados entre si por hastes invariaveis.

Eis como diz D'Alembert :

« PROBLEMA GERAL. — Seja dado um systema de corpos dispostos uns em relação aos outros de uma maneira

qualquer; supponhamos que se imprima a cada um destes corpos um movimento particular, que elle não possa seguir por causa da acção dos outros corpos: achar o movimento que cada corpo deve tomar.

«*Solução.* — Sejam A, B, C, etc., os corpos que compõem o systema e supponhamos que se lhes tenha impresso os movimentos a, b, c, etc., que sejam forçados, por causa de sua mutua acção, a mudar nos movimentos a_1, b_1, c_1, etc. E' claro que póde-se considerar o movimento a_1 impresso ao corpo A como composto do movimento a_1, que elle tem tomado e d'um outro movimento α; que póde-se analogamente olhar os movimentos b, c, etc., como compostos dos movimentos b_1, β; c_1, γ, etc.; d'onde segue-se que o movimento dos corpos A, B, C, etc., entre si teria sido o mesmo, si em logar de lhes dar as impulsões a, b, c, etc., se lhes tivesse dado simultaneamente as duplas impulsões a_1, α; b_1, β; c_1, γ; etc. Ora, por hypothese os corpos A, B, C, etc., tomam realmente os movimentos a_1, b_1,c_1, etc.; logo, os movimentos α, β, γ, etc., devem ser taes que não perturbem os movimentos a_1, b_1, c_1, etc., isto é, que, si os corpos só tivessem recebido os movimentos α, β, γ, etc., estes movimentos teriam devido se destruir mutuamente e o systema ficar em repouso.

« D'ahi resulta o principio seguinte, para achar o movimento de muitos corpos que actuam uns sobre os outros:

Decompondo os movimentos a, b, c, etc., impressos a cada corpo, cada um em dois outros a_1, α; b_1, β; c_1, γ, etc., *taes que si havendo sómente impresso aos corpos os movimentos a_1, b_1, c_1, etc., elles pudessem conservar estes movimentos sem se prejudicar reciprocamente; e que si lhes tivessemos impresso sómente os movimentos* α, β, γ, *etc., o systema permanecesse em repouso*; é claro que a_1, b_1, c_1, etc., serão os movimentos que estes corpos tomariam, em virtude de sua mutua acção: o que era necessario achar.

« Corollario.— Quando um dos movimentos impressos é nullo, é visivel que os movimentos componentes

são iguaes e contrarios. Por exemplo, si a é igual a zero, se terá o movimento α igual e de direcção contraria ao movimento a_1; com effeito, a é, em todos os casos, a diagonal d'um parallelogrammo cujos lados são a_1 e α; ora, quando a diagonal é nulla, os lados são iguaes e directamente oppostos. Logo, etc.»

56. Para melhor comprehensão do principio de d'Alembert, mostremos como applical-o a um exemplo, tirado da propria *Dynamica* d'este geometra.

Problema.— Achar a velocidade d'uma haste CR fixa em C (fig. 14) e carregada de tantas massas A, B, R, etc., quantas quizermos, suppondo que estas massas, si a haste não as impedisse, descrevessem em tempos iguaes as linhas infinitamente pequenas AO, BQ, RT, etc., perpendiculares á haste.

Solução.— Decomponhamos as velocidades AO, BQ e RT, impressas a cada corpo, cada uma em duas outras: (AM,— MO), (BG, — GQ), (RS, ST). A alavanca CAR devendo ficar em repouso si os corpos A, B, R só houvessem recebido as velocidades (— MO), (— GQ) e ST, teremos:

$$-A.\ MO.\ AC - B.\ GQ.\ BC + R.\ ST.\ RC = 0, \qquad (e)$$

em virtude da lei de equilibrio da alavanca submettida ás forças medidas pelas quantidades de movimento $-A.\ MO$, $-B.\ GQ$, $R.\ ST$. A esta equação chega-se facilmente, por extensão da lei da alavanca ao caso de tres forças. Fazendo, para abreviar,

$$AO = a,\ BQ = b,\ RT = c,$$

$$AC = r,\ BC = r',\ RG = \rho,$$

$$AM = x,\ BC = y,\ RS = z,$$

a equação precedente se transformará na seguinte:

$$R\,(c - z)\,\rho = A\,(x - a)\,r + B\,(y - b)\,r'. \qquad (f)$$

Por serem semelhantes os triangulos *ACM, BCG, RCS*, teremos:

$$x = \frac{zr}{\rho}, \; y = \frac{zr'}{\rho},$$

equações, que, reunidas á equação precedente, serão sufficientes para determinar os valores de x, y e z.

Substituindo os valores de x e y na equação de equilibrio, vem:

$$R\,(c - z)\,\rho = A\left(\frac{zr}{\rho} - a\right)r + B\left(\frac{zr'}{\rho} - b\right)r',$$

da qual o valor de z será:

$$z = \frac{\rho^2 Rc + r\,\rho\, Aa + r'\,\rho\, Bb}{\rho^2 R + r^2 A + r'^2 B}.$$

Portanto,

$$x = \frac{r^2 Aa + rr'\, Bb + r\,\rho\, Rc}{\rho^2 R + r^2 A + r' B},$$

$$y = \frac{r'^2 Bb + rr'\, Aa + r'\rho\, Rc}{\rho^2 R + r^2 A + r'^2 B}.$$

Taes serão as expressões das velocidades das massas R, A e B, velocidades que têm effectivamente lugar por causa da haste de ligação. Qualquer d'estas velocidades será a velocidade da propria haste.

57. *Concepção de Euler.*— O principio de D'Alembert consistindo, como vimos, em que *ha em cada instante equilibrio entre as forças a que são devidos os movimentos que se neutralisam, isto é, entre as forças perdidas e ganhas no conflicto*, torna-se, em geral, de mui difficil applicação.

Para evitar a decomposição dos movimentos impressos aos corpos do systema, Euler, em os muitos problemas de Dynamica que resolveu, fez uso do principio de D'Alembert

com uma fórma sempre preferivel. Esta fórma consiste em que : *ha em cada instante equilibrio entre as forças primitivas que animam a todos os corpos do systema suppostos livres e as forças proprias aos movimentos effectivos, quando estas são tomadas em sentidos contrarios*. Assim, no problema precedente, a equação *(e)* de equilibrio entre as forças perdidas e ganhas seria logo estabelecida entre as forças *dadas*,

$$R.\ RT,\ B.\ BQ,\ A.\ AO,$$

primitivamente impressas aos corpos como si fossem livres e as forças *incognitas*,

$$-R.\ RS, -B.\ BG, -A.\ AM,$$

a que são devidos os movimentos effectivos.

D'onde, a equação de equilibrio será :

$$R.\ RT.\ RC + B.\ BQ.\ BC + A.\ AO.\ AC -$$
$$-(R.\ RS.\ RC + B.\ BG.\ BC + A.\ AM.\ AC) = o;$$

ou

$$R\,(c - z)\,\rho + B\,(b - y)\,r' + A\,(a - x)\,r = o\,;$$

ou ainda

$$R\,(c - z)\,\rho = A\,(x - a)\,r + B\,(y - b)\,r',$$

que é a nossa equação *(f)* já achada.

58. A fórma usada por Euler, tornando de facil emprego o principio de D'Alembert, não constitue novo principio.

Para conhecermos a identidade das concepções ou a distincção dos dois enunciados da lei geral da communicação mutua dos movimento, supponhamos (fig. 15) que R seja a velocidade primitivamente impressa ao corpo A de um dado systema. Decompondo-a, pela lei do parallelogrammo, em duas outras P e Q, supponhamos que P represente a velocidade perdida ou ganha pelo corpo A em vista da acção dos outros corpos no mesmo systema e seja Q a velocidade

que elle toma effectivamente. Prolongando QA de um comprimento igual $A\,Q'$ e terminando o parallelogrammo $RAQ'P$, vê-se claramente que a velocidade perdida ou ganha P é resultante das velocidades R e Q' ; isto é, a velocidade P tem para componentes naturaes a velocidade primitiva R e a effectiva Q, tomada em sentido contrario.

Resulta d'aqui que, si ha equilibrio entre as forças a que são devidas as velocidades perdidas e ganhas, em cada instante, haverá tambem equilibrio entre as forças a que são devidos os movimentos primitivamente impressos aos corpos como si fossem livres e as forças proprias aos movimentos effectivos, quando estes são tomados em sentidos contrarios: o que era necessario demonstrar.

59. Dissemos que a lei de Newton teve de ser generalisada, porque só convinha aos casos extremamente simples em que dois pontos materiaes movem-se directamente sobre a recta que os liga e que o principio de D'Alembert era a sua generalisação. Com effeito, na lei de Newton vemos que *ha constantemente igualdade* entre a acção e a reacção ; e no principio de D'Alembert vemos que *ha constantemente equilibrio* entre as forças perdidas e ganhas.

A acção sendo uma força perdida e a reacção uma força adquirida, resulta que da inducção de Newton passamos á de D'Alembert substituindo a noção de *igualdade* pela concepção de *equilibrio*.

A concepção de Euler, ultima phase da lei geral da communicação dos movimentos, facilita-nos ainda mais a comprehensão de que esta lei é a generalisação da de Newton, pois o equilibrio das forças perdidas ou ganhas reduzindo-se ao equilibrio de forças equivalentes, simples differenças entre as forças dadas e as forças incognitas do problema dynamico que se considera, vemos que na lei de Newton diz-se que a reacção é opposta á acção e na lei geral diz-se que as forças effectivas são oppostas ás forças dadas.

60. O destino do principio de D'Alembert é reduzir todas as questões da segunda e principal parte da dynamica a

simples questões de estatica correspondentes; e não devemos exageral-o affirmando, como Poisson e outros geometras o disseram, que por meio d'esse principio todas as questões relativas ao movimento são referidas a simples questões de equilibrio: elle só póde servir para uma tal reducção quando tratarmos de problemas da dynamica dos systemas, que suppõe conhecida a dynamica de um ponto. N'esta primeira parte da dynamica é completamente illusorio o emprego do principio de D'Alembert, pois que um ponto unico não nos póde offerecer a distincção entre as forças perdidas e ganhas, distincção só peculiar aos systemas.

Embora a dynamica do ponto seja um caso particular da dynamica dos systemas, não podemos deixar de aprecial-a directamente e em primeiro logar.

O seu estudo deve prevalecer porque deve servir de base ao estudo da dynamica dos systemas, necessariamente mais importante, mais extenso e mais difficil: razões que explicam a sua inauguração em época muito posterior á da creação da dynamica do ponto material, por Kepler e Galileo.

5. PRINCIPIO DAS VELOCIDADES VIRTUAES

61. O principio de d'Alembert reclama uma lei geral de equilibrio, afim de poder facilitar o estudo do movimento dos systemas. E esta lei deve resultar do conjuncto das leis physicas de movimento, embora a inducção a tivesse feito directamente surgir. E' a lei das *velocidades virtuaes*, que serviu, em 1788, a Lagrange, de fundamento a uma de suas grandes obras, a *Mecanica Analytica*: a obra prima da sciencia do equilibrio e movimento, do XVIII seculo. Primitivamente entrevista por Guid-Ubalde, foi em 1655 induzida e verificada por Galileo como propriedade geral do equilibrio das machinas. Em 1717, João Bernouilli enunciou-a de uma maneira geral; mas só a Lagrange estavam destinadas todas as bellas applicações d'esse grande principio.

62. Imaginemos um ponto em equilibrio sob a acção de um numero qualquer de forças. Dá-se o nome de *velocidade virtual* á velocidade que animaria o ponto no *primeiro instante* de seu movimento, si deixasse de haver o equilibrio supposto. Projectando a velocidade virtual d'um ponto respectivamente sobre as direcções das forças que lhe são applicadas, teremos a velocidade virtual avaliada segundo a direcção de cada força. Essa projecção será positiva ou negativa, conforme seja dirigida no mesmo sentido que a força ou em sentido contrario, a partir do seu ponto de applicação. O producto de uma força pela velocidade virtual projectada segundo a sua direcção é o que se chama *momento virtual* da força.

63. *Caso d'um ponto livre.*— Sejam (fig. 16) P, Q, R, etc., as forças applicadas ao ponto A e seja Π a sua resultante. Sobre o eixo AX projectemos todas as forças dadas e tambem a sua resultante.

Chamemos φ o angulo que a resultante Π faz com o eixo AX e designemos por α, α'. α'', etc., os angulos que as componentes P, Q, R, etc. fazem respectivamente com o mesmo eixo. Supponhamos que o ponto A esteja em equilibrio sob a acção das forças dadas e imaginemos que AB seja a velocidade de que o ponto A seria animado no primeiro instante de seu movimento, si o equilibrio deixasse de ter logar, isto é, que AB seja uma velocidade virtual.

Projectemos AB sobre as direcções das forças e da resultante.

Por causa da projecção das forças sobre o eixo, teremos:

$$\Pi \cos \varphi = P \cos \alpha + Q \cos \alpha' + R \cos \alpha'' + \text{etc.}; \qquad (g)$$

mas, por causa da projecção da velocidade virtual sobre as forças, resultará :

$$\left.\begin{array}{l} A\varpi = AB \cos \varphi\ , \\ Ap = AB \cos \alpha\ , \\ Aq = AB \cos \alpha', \\ Ar = AB \cos \alpha'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (h)$$

d'onde, eliminando os cosenos dos angulos que as forças fazem com o eixo da projecção, teremos :

$$\Pi. \frac{A\tilde{\omega}}{AB} = P. \frac{Ap}{AB} + Q. \frac{Aq}{AB} + R. \frac{Ar}{AB} + etc.,$$

ou simplesmente

$$\Pi. \tilde{\omega} = Pp + Qq + Rr + etc.$$

Como o ponto A é supposto em equilibrio, a resultante Π será nulla.

Portanto,

$$Pp + Qq + Rr + etc. = o ; \qquad (i)$$

isto é, que, *no caso de equilibrio entre muitas forças applicadas a um mesmo ponto e dirigidas de uma maneira qualquer, a somma dos productos de cada uma d'estas forças pela velocidade virtual do mesmo ponto avaliada no sentido de cada força, é igual a zero*

64. *Caso d'um ponto sobre uma curva dada.*— Si o ponto A (fig. 17) fosse sujeito a permanecer sobre uma curva dada MAM', a sua velocidade virtual seria infinitamente pequena, pois que o deslocamento se effectuaria segundo a tangente á curva n'esse ponto. Portanto, as projecções d'essa velocidade virtual sobre as differentes forças applicadas ao ponto A serão tambem infinitesimaes. D'onde, representando por ds a velocidade virtual e por dp, dq, dr. etc., as respectivas projecções sobre as forças, teremos, da mesma maneira que estabelecemos as equações (g) e (h), as seguintes:

$$\Pi \cos \varphi = P \cos \alpha + Q \cos \alpha' + R \cos \alpha'' + etc.,$$

$$dp = ds \cos \alpha, \quad dq = ds \cos \alpha', \quad dr = ds \cos \alpha'', \quad etc.;$$

d'onde,

$$\Pi \cos \varphi = P\, d\, p + Q\, d\, q + R\, d\, r + etc.$$

Ora, o ponto A estando em equilibrio, necessariamente a resultante das forças consideradas será, em virtude da lei de

Carnot, dirigida perpendicularmente á tangente á curva, tirada por esse ponto; d'onde

$$\varphi = 90^o,$$

ou

$$\cos \varphi = 0.$$

Portanto,

$$\Pi \cos \varphi = 0,$$

ou

$$P\,d\,p + Q\,d\,q + R\,d\,r + etc = 0, \qquad (k)$$

será a equação de equilibrio. Ella significa, como no caso do ponto livre, *que é nulla a somma algebrica dos momentos virtuaes de todas as forças applicadas ao ponto.*

65. *Caso de um ponto sobre uma superficie dada.*—Si o ponto se achasse sobre uma superficie dada a que fosse sujeito, a equação precedente ainda teria logar, pois o deslocamento virtual se effectuaria segundo o plano tangente á mesma superficie n'esse ponto e seriam, portanto, infinitamente pequenas a velocidade virtual e as respectivas projecções sobre as forças a elle applicadas. A resultante das forças devendo ser, em virtude da lei de Carnot, normal á superficie ou ao plano tangente em A, o angulo φ seria de 90°. D'onde a equação de equilibrio seria:

$$P\,d\,p + Q\,d\,q + R\,d\,r + etc = 0.$$

Mas, falta-nos attender a uma consideração que não póde ser desprezada. Os deslocamentos são, como dissemos, infinitesimaes; porém, podia o ponto A no seu deslocamento virtual ter mudado de curva sobre a superficie em que se achava. Elle podia, n'esse deslocamento, passar da curva em que se achava na superficie considerada para uma outra curva da mesma superficie, infinitamente proxima da primeira.

Portanto, o deslocamento virtual não devendo mais ser representado pela differencial ds, nós o representaremos, com Lagrange, pela *variação* δs, sendo as suas projecções sobre as forças respectivamente designadas pelas *variações*

δp, δq, δr, etc. Assim, a equação de equilibrio de um ponto sujeito a permanecer sobre uma superficie dada será, mais geralmente,

$$P \delta p + Q \delta q + R \delta r + etc = 0. \qquad (l)$$

Ella tem a mesma significação que nos casos precedentes. Resumindo, sob uma fórma symbolica, as equações *(i)*, *(k)*, *(l)*, teremos a equação seguinte:

$$\Sigma (P \delta p) = 0,$$

na qual o signal Σ indica somma de productos analogos, P indica uma força qualquer e a *variação* δp a projecção da velocidade virtual, finita ou infinitesimal, sobre a respectiva força.

66. *Caso de um systema livre.*— Consideremos um systema de pontos materiaes, ligados entre si de uma maneira qualquer. Chama-se *movimento virtual* d'este systema a qualquer deslocamento infinitamente pequeno que lhe seja attribuido como podendo effectuar-se, mas que realmente não se effectue. Qualquer ponto material do systema se deslocará então virtualmente e, como o systema é supposto livre, descreverá livremente a sua trajectoria no espaço.

Isto posto, imaginemos a serie infinita de fórmas differentes que o systema considerado póde nos apresentar sem que sejam violadas as condições de ligação dos seus differentes pontos materiaes; isto é, devidas a deslocamentos taes que as distancias mutuas de todos os pontos do systema fiquem sempre as mesmas.

Considerando o systema em uma situação determinada, supponhamos que aos seus diversos pontos sejam applicadas forças quaesquer e procuremos estabelecer a lei geral que deve verificar-se no caso de equilibrio d'estas forças.

Si o systema material que consideramos soffre uma mudança de fórma, *que não altere o modo de ligação dos seus differentes pontos*, é claro que si esta nova fórma é

infinitamente pouco differente da primitiva, os pontos de applicação das forças descreverão trajectorias rectilineas e infinitamente pequenas.

Projectemos sobre as direcções das forças applicadas aos diversos pontos as respectivas trajectorias e seja a projecção do caminho infinitesimal descripto pelo ponto de applicação da força P, sobre a direcção d'esta força representado por δp. Ao producto $P \delta p$, já dissemos, chama-se *momento virtual* da força P. Representemos por m_1, m_2, m_3, etc., os differentes pontos de applicação das forças P_1, P_2, P_3, etc., applicadas ao systema.

Isto posto, procuremos a lei do equilibrio do systema. Ora, o equilibrio total do systema não podendo evidentemente ter logar sem que cada um dos seus differentes pontos esteja separadamente em equilibrio e cada ponto do systema devendo necessariamente soffrer não sómente a acção das forças exteriores como tambem a das forças interiores do systema; representando por $F_1 df_1$, $F_2 df_2$, $F_3 df_3$, etc., os momentos virtuaes d'estas ultimas forças, respectivamente applicadas aos mesmos pontos m_1, m_2, m_3, etc., : é claro que o equilibrio do systema se traduzirá pelas equações seguintes :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,(P_1\,\delta p_1) + \Sigma\,(F_1\,\delta f_1) = o, \\ \Sigma\,(P_2\,\delta p_2) + \Sigma\,(F_2\,\delta f_2) = o, \\ \Sigma\,(P_3\,\delta p_3) + \Sigma\,(F_3\,\delta f_3) = o, \end{array}\right\} \qquad (m)$$

etc., etc., em numero exactamente igual ao de pontos do systema. N'estas equações, os valores das *variações* δp_1, δp_2, δp_3, etc., δf_1, δf_2, δf_3, etc., são relativos a um deslocamento qualquer attribuido aos pontos do systema como si fossem independentes; entretanto, como não são realmente independentes e são considerados formando um systema, é claro que esses pontos não poderão deslocar-se senão de uma maneira conforme a natureza das ligações estabelecidas entre elles e que constituem o systema. Ora, esta compatibilidade que deve effectivamente existir entre os deslocamentos virtuaes dos pontos materiaes de um systema e as suas ligações

muito restringe a generalidade das variações δp_1, δp_2, δp_3, etc. ; δf_1, δf_2, δf_3, etc. Assim, resultará que, qualquer que seja a mudança de figura infinitamente pequena attribuida ao systema, sommando-se as equações *(m)*, os termos relativos ás forças interiores se destruirão por serem dois a dois iguaes e contrarios, em virtude da terceira lei do movimento. D'onde resultará sómente a equação

$$\Sigma\,(P_1\,\delta p_1) + \Sigma\,(P_2\,\delta p_2) + \Sigma\,(P_3\,\delta p_3) + \text{etc.} = o;$$

ou, de uma maneira geral,

$$\Sigma\,(P\,\delta\,p) = o\,;$$

isto é, que, *no caso de equilibrio d'um systema material de figura qualquer, é nulla a somma algebrica dos momentos virtuaes das forças applicadas exteriormente ao mesmo systema, quando a sua figura soffre uma mudança infinitamente pequena compativel com as condições de ligação dos pontos materiaes que o constituem.*

67. Para que fique bem clara a evidencia d'esta extensa lei da mecanica, consideremos dois pontos quaesquer do systema supposto. Por serem os deslocamentos attribuidos ao systema compativeis com as ligações dos seus pontos, a distancia entre esses dois pontos será uma linha invariavel. Sejam (fig. 18) m_1 e m_2 os dois pontos considerados. No caso de equilibrio das forças exteriores P_1, P_2, P_3, etc., supponhamos que haja um esforço de tensão na linha $m_1\,m_2$. Este esforço nos dará para a equação de equilibrio do ponto m_1 uma força F_1 dirigida de m_2 para m_1 e para a equação de equilibrio do ponto m_2 uma força F_2, igual a F_1, dirigida em sentido contrario. Supponhamos que estes pontos, deslocando-se simultaneamente, percorram os espaços infinitamente pequenos $m_1\,m'$, $m_2\,m''$. Sejam f_1 e f_2 as projecções dos pontos m' e m'' sobre a recta $m_1\,m_2$. O momento virtual

da força F_2 será $F_2 \times m_2 f_2$ e o da força F_1 será $- F_1 \times m_1 f_1$. A somma algebrica d'estes momentos será:

$$F_2 \times m_2 f_2 - F_1 \times m_1 f_1.$$

Por serem iguaes as duas forças F_1 e F_2, esta expressão tomará a fórma:

$$F_1 \ (m_2 f_2 - m_1 f_1) ;$$

ou, o que é o mesmo, por ser

$$m_2 f_2 = f_1 f_2 - f_1 m_2 \text{ e } m_1 f_1 = m_1 m_2 - f_1 m_2,$$
$$F_1 \ (f_1 f_2 - m_1 m_2).$$

Si r designa a distancia $m_1 m_2$, e $r + dr$ a distancia $m' m''$, dos pontos m_1 e m_2 depois de seus deslocamentos, e chamando α o angulo infinitamente pequeno que fazem as direcções $m' m''$ e $m_1 m_2$, teremos:

$$f_1 f_2 = (r + dr) \cos \alpha ;$$

d'onde a somma algebrica dos momentos considerados será:

$$F_1 [(r + dr) \cos \alpha - r] = F_1 \ dr \cos \alpha.$$

Por ser o desenvolvimento em serie de $\cos \alpha$,

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.\ 2} + \frac{\alpha^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{\alpha^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + etc.,$$

a somma dos momentos será:

$$F_1 \ dr \left(1 - \frac{\alpha^2}{1.\ 2} + \frac{\alpha^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \ldots\ldots\right).$$

Desprezando os infinitamente pequenos de ordens superiores á primeira, esta somma se reduzirá simplesmente a

$$F_1 \ dr.$$

Por ter sido supposta invariavel a distancia r, o producto $F_1 \ dr$ será nullo evidentemente. Assim, os momentos virtuaes das duas forças F_1 e F_2 se destruirão reciprocamente quando fizermos a somma das equações de

equilibrio *(m)* dos differentes pontos materiaes do systema. E como uma identica conclusão teria logar para com todos os esforços interiores que se manifestam nas ligações do systema, ficará claro ao nosso espirito que a lei geral do equilibrio de um systema livre, de figura qualquer, symbolisada pela equação

$$\Sigma\ (P\ \delta p = o),$$

é sómente relativa ás forças exteriores ao mesmo systema.

68. *Caso de um systema sujeito a restricções.*— Si o systema material que consideramos não é inteiramente livre, o que acontece quando existem no systema alguns pontos fixos ou sujeitos a permanecerem sobre curvas ou superficies dadas, a equação precedente, no caso de equilibrio do systema, deverá ainda ter logar.

Com effeito o equilibrio do systema não podendo evidentemente ser destruido si substituirmos os esforços que supportam os pontos fixos por forças exteriores equivalentes, é claro que este artificio tornará o systema como si fosse inteiramente livre. E como, para todos os deslocamentos compativeis com as ligações do systema, os momentos virtuaes d'estas ultimas forças exteriores são evidentemente nullos, porque os pontos materiaes não podem deslocar-se no sentido dos esforços supportados pelos obstaculos que retêm os pontos fixos, é claro que a equação

$$\Sigma\ (P\ \delta p) = o$$

sempre subsistirá sem que seja preciso a substituição indicada.

Tal é em que consiste a lei das velocidades virtuaes.

69. *Lei complementar de Lagrange.*— A' lei das velocidades virtuaes relativas ás forças exteriores ou directamente activas deve ser incorporada a inducção de Lagrange sobre as direcções das forças interiores ou passivas.

Para que possamos formular convenientemente a lei de Lagrange, supponhamos que os pontos d'um systema material de figura qualquer sejam referidos a tres eixos rectangulares fixos no espaço.

Sejam (x_1, y_1, z_1) as coordenadas do ponto m_1, (x_2, y_2, z_2) as coordenadas do ponto m_2 e assim por diante.

O systema ficará convenientemente definido, isto é, a sua composição será conhecida pelas equações que exprimirem as condições de ligação dos differentes pontos de applicação das forças que actuam sobre o mesmo systema.

Por exemplo, si as ligações dos pontos do systema são invariaveis, a distancia r dos dois pontos m_1 e m_2, dada algebricamente pela equação

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

será uma constante.

Esta equação chama-se uma *equação de ligação* do systema. A sua fórma é a de uma superficie espherica, cujo raio é designado pela constante r. Si o ponto m_1 fôr supposto fixo, as suas coordenadas (x_1, y_1, z_1) serão constantes e determinarão o centro d'essa superficie espherica, que será necessariamente descripta pelo ponto m_2, cujas coordenadas (x_2, y_2, z_2) serão as unicas variaveis d'aquella equação de ligação.

Lagrange, generalisando a inducção de Carnot sobre a direcção das forças passivas, no caso d'um ponto unico, estabeleceu o principio seguinte :

Toda equação, que exprime o modo de ligação dos pontos de um systema, fornece para cada ponto uma força normal á superficie que elle descreveria si todos os outros que com elle coexistem na equação de ligação fossem suppostos fixos.

Basta o simples exame do que acima dissemos sobre a equação precedente e que se considere que a força F_2, applicada ao ponto m_2 e dirigida para o interior do systema, é dirigida, segundo o raio r, que é normal á esphera descripta em torno do centro m_1, para que se possa comprehender a lei de Lagrange.

Ella será devidamente esclarecida na theoria do equilibrio dos systemas variaveis.

CAPITULO III

CALCULO DAS VARIAÇÕES

70. A lei das velocidades virtuaes, para que possa ser sufficientemente comprehendida, exige o conhecimento do *calculo das variações* e este estudo será aqui feito a titulo de *supplemento algebrico* dos principios fundamentaes da mecanica geral.

Sabias reflexões de A. Comte nos ensinam que todos os ramos do calculo sempre foram originados no dominio geometrico: e foi pela consideração de problemas geometricos que originou-se o calculo das variações.

Com effeito, a historia nos mostra que, em 1693, João Bernouilli, propondo o celebre problema da *brachistochrona*, ou linha da mais veloz descida, e, em 1701, Jacques Bernouilli, resolvendo o famoso problema dos *isoperimetros*, iniciaram uma nova ordem de questões d'um genero differente do dos *maximos* e *minimos* ordinarios.

Todas essas indagações foram por Euler generalisadas sufficientemente, mas sem a simplicidade necessaria.

Isto determinou a Lagrange que, em 1755, communicasse a Euler a descoberta de seu novo methodo, a que este deu o nome de *Methodo das variações*.

Dest'arte, o methodo das variações vinha apenas simplificar as soluções dos problemas transcendentes de *maximos* e *minimos*, já resolvidos completamente.

Tal foi a sua origem historica.

71. Mas, esta immortal creação de Lagrange ficaria certamente muito esteril, si o seu papel fosse simplesmente destinado a tratar de questões já resolvidas.

Foi o que, felizmente, não aconteceu, porque Lagrange comprehendeu espontaneamente o seu destino : tal como o de ser um instrumento necessario e indispensavel ao estudo da mecanica geral.

E' ao methodo das variações que a sciencia deve a grande obra, a que Lagrange chamou a *Mecanica Analytica*.

Portanto, si o calculo das variações tem a sua origem no dominio geometrico, é na mecanica geral que encontra o seu principal destino, que encontra as suas mais elevadas applicações.

Na geometria o calculo das variações é superfluo, ao passo que na mecanica geral é essencial o seu pleno conhecimento.

72. « Por menos que se saibam os principios do Calculo differencial, conhece-se o methodo de determinar as maiores e as menores ordenadas das curvas ; mas, ha questões de *maximos* e *minimos* d'um genero mais elevado e que, ainda que dependentes do mesmo methodo, não se resolvem tão facilmente. São aquellas em que se trata de achar as proprias curvas, nas quaes uma expressão integral dada seja um *maximo* ou um *minimo* em relação a todas as outras curvas [1]. »

Para melhor comprehensão do que fica dito, sejam A e B (fig. 19) dois pontos dados.

Supponhamos que entre estes dois pontos queremos traçar uma curva plana tal, que a área comprehendida entre ella, o eixo das abscissas e as coordenadas orthogonaes dos pontos A e B seja um maximo entre as áreas de todas as curvas do mesmo perimetro.

Não se tratando de determinar as coordenadas dos pontos A e B, pois que são ellas quantidades já conhecidas e devendo procurar-se a equação geral da curva que satisfaça a condição exigida, é claro que não poderemos servir-nos do methodo ordinario para a determinação dos maximos e minimos das variaveis.

---

[1] LAGRANGE — *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima, et les minima des formules intégrales indéfinies.* — Miscellanea Taurinensia, t. II, 1760-1761.

Ora, si $y = f(x)$ é a equação da curva procurada, a área comprehendida entre a curva e as coordenadas $A\,C$ e $B\,C$ será, em coordenadas rectangulares, representadas por

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

designando-se por x_0 e x_1 as abscissas dos pontos A e B: queremos determinar a equação $y = f(x)$ que deve necessariamente ter logar para que essa integral seja um *maximo*.

73. Supponhamos que $AM'DB$ seja uma curva infinitamente pouco differente da curva $AMDB$. Esta consideração nos leva a admittir que cada ponto da transformada $AM'DB$ tenha o seu correspondente na curva primitiva $AMDB$. Ao accrescimo que recebe cada uma das coordenadas dos pontos da curva primitiva quando consideramos o seu correspondente na transformada, chama-se *variação* d'essa coordenada. E chama-se variação da curva ou da área ao accrescimo do perimetro ou da área da curva primitiva. Assim, a variação da ordenada MP é $M'\,P' - MP$; a de AP é $AP' - AP$; a da curva $AMDB$ é $AM'DB - AMDB$, e a da área $AMDBCA$ é $AM'DBCA - AMDBCA$.

O que evidentemente nos leva a não confundir a differencial de uma grandeza com a sua variação, é que *a differencial é a differença entre dois valores consecutivos tomados sobre a mesma curva, emquanto que a variação é a differença de dois valores tomados de uma curva á outra*. Por exemplo: a differencial da abscissa AP é $AQ - AP$, a da ordenada MP é $NQ - MP$ e a variação da abscissa AP é $AP' - AP$, a da ordenada MP é $M'P' - MP$.

Lagrange empregou a caracteristica δ para designar a variação de uma quantidade, conservando a caracteristica d, introduzida por Leibnitz, para designar as differenciaes geometricas.

74. « As variações, bem como as differenciaes, são introduzidas no calculo como simples auxiliares, para ajudar a descobrir a relação que deve realmente existir entre as

coordenadas da primeira curva. E' preciso, pois, eliminar todas estas variações depois de tel-as introduzido, afim de que sómente subsista a relação procurada entre as coordenadas ou, se quizermos, entre estas coordenadas e suas differenciaes primeiro e depois, por via de integração, entre as unicas coordenadas e as constantes que compõem o systema das quantidades dadas (1) ».

Lagrange, tão original quão profundo na sciencia mathematica, dizia a Carnot *que o verdadeiro segredo do calculo consistia na arte de bem comprehender os diversos gráos de indeterminação de que a quantidade é susceptivel.*

« Com effeito, observa Carnot, em todos os ramos do calculo tomado geralmente, nós vemos que seus processos são sempre fundados sobre os diversos gráos de indeterminação das quantidades que elle compara. Um numero abstracto é menos determinado que um numero concreto, porque este especifica não sómente o quanto do numero, mas ainda a qualidade do objecto submettido ao calculo; as quantidades algebricas são mais indeterminadas que os numeros abstractos, porque ellas não especificam mesmo o quanto: entre estas ultimas, as variaveis são mais indeterminadas que as constantes, porque estas são consideradas como fixas durante um mais longo periodo de calculo; as quantidades infinitesimaes são mais indeterminadas que as simples variaveis, porque ellas ficam ainda susceptiveis de mutação, mesmo que se considerem as outras como fixas; emfim as variações são mais indeterminadas que as simples differenciaes, porque estas são sujeitas a variar segundo uma lei dada, ao passo que a lei segundo a qual faz-se mudar as outras é arbitraria. Nada termina essa escala dos diversos gráos de indeterminação (2).»

Tão magistraes reflexões do eminente Carnot não podiam deixar de ser transcriptas.

---

(1) CARNOT — *Réflexions sur la Méthaphysique du Calcul Infinitésimal.*
(2) CARNOT — Op. cit.

Ellas vêm comprovar *que as variações são quantidades ainda mais indeterminadas que as simples differenciaes.*

« Com effeito, quando se concebe que a natureza d'uma curva vem a mudar infinitamente pouco, olha-se sempre a primeira curva como um termo fixo ao qual são referidos os seus diversos estados successivos. As pequenas mudanças operadas exprimem-se por meio das variações que soffrem as coordenadas e outras quantidades do systema e estas variações podem ser suppostas tão pequenas quanto quizermos, sem nada mudar ao systema dado, emquanto que o das variações é um systema auxiliar que se approxima continuamente do primeiro, até d'elle differir tão pouco quanto quizermos.

« As differenciaes são sujeitas á lei prescripta pela relação das coordenadas, ao passo que a lei que liga as variações a estas coordenadas é arbitraria; d'onde segue-se que, ainda que umas e outras sejam simples auxiliares, as ultimas são mais indeterminadas que as primeiras, pois que ellas poderiam mudar ainda, quando mesmo se considerassem estas como fixas [1]. »

75. Seja (fig. 20) x a abscissa OP do ponto M. Supponhamos que a curva A'B' seja uma transformada da curva AB e que x' seja a abscissa OP' do ponto M' da tansformada, correspondente ao ponto M da curva primitiva. Resultará que.

$$\delta x = x' - x.$$

D'aqui podemos concluir que, para obter a variação d'uma equação finita qualquer, devemos dar um accrescimo a cada uma de suas variaveis e subtrahir do resultado a primeira equação, o que é propriamente o methodo empregado na differenciação das equações.

Assim, nenhuma differença existe entre as regras do calculo das variações e as do calculo differencial. Só as notações dos dois calculos são differentes, pois a natureza dos accrescimos é profundamente diversa.

---

[1] Carnot — Op. cit.

76. Supponhamos que a curva A'B' (fig. 21) seja uma transformada da curva AB e que os pontos M' e N' d'essa curva correspondam aos pontos M e N de AB. Sejam

$$MP = y, \; NQ = y + dy, \; M'P' = y + \delta y.$$

Resultará que:

$$N'Q' = M'P' + dM'P',$$
$$N'Q' = NQ + \delta\, NQ;$$

d'onde

$$M'P' + dM'P' = NQ + \delta\, NQ;$$

ou

$$y + \delta\, y + d\,(y + \delta\, y) = y + dy + \delta\,(y + dy);$$

d'onde

$$d.\, \delta\, y = \delta.\, dy;$$

isto é, que *a variação da differencial d'uma quantidade qualquer é sempre igual á differencial da variação d'esta mesma quantidade.*

Tal é a primeira regra fundamental do calculo das variações; ella nos permitte a transposição das carecteristicas d e δ. Assim, será evidente que

$$\delta.\, d^2 y = d^2.\, \delta\, y;$$

ou, d'uma maneira geral,

$$\delta\, d^m y = d^m\, \delta\, y.$$

77. Seja a equação

$$U = \int Z,$$

na qual

$$Z = f\,(x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots).$$

Differenciando-a temos:

$$d\,U = Z$$

Si agora differenciarmos esta equação com a caracteristica δ, virá :

$$\delta . d\, U = \delta\, Z;$$

ou, transpondo as caracteristicas do primeiro membro,

$$d . \delta\, U = \delta\, Z;$$

d'onde, integrando, resultará :

$$\delta\, U = \int \delta\, Z.$$

E por ser

$$U = \int Z,$$

teremos :

$$\delta . \int Z = \int \delta\, Z;$$

isto é, que *a variação da integral de uma quantidade differencial qualquer é igual á integral da variação da mesma quantidade.*

E' esta a segunda regra essencial ao calculo das variações e por meio da qual poderemos transpôr os signaes δ e $\int$, qualquer que seja a expressão differencial dada.

78. Embora os problemas de maximos e minimos que deram nascimento ao calculo das variações sejam de natureza differente da dos problemas ordinarios de maximos e minimos, comtudo o principio geral que preside a estas duas ordens de questões é exactamente o mesmo.

O principio geral, a que nos referimos, devido a Kepler, consiste em que, *no estado de maximo ou de minimo de uma quantidade variavel, a sua differencial é sempre nulla.* Com effeito, qualquer que seja a quantidade que tenha de attingir, no seu curso de variação, a um valor *maximo* ou *minimo*, sendo chegada a este termo, não poderá mais crescer ou decrescer. Nas proximidades dos estados *maximo* e *minimo*, a quantidade varia com mais lentidão e fica como que estacionaria quando attinge a estes estados. A partir d'esse termo, a quantidade retoma o seu caracter de variavel e começa a decrescer ou crescer conforme tinha sido *maxima* ou *minima*. Assim, no estado *maximo* ou *minimo*, a quantidade não varia e, portanto, póde ser considerada como constante; d'onde a annullação da differencial da quantidade supposta

será o caracter algebrico fundamental do seu estado de *maximo* ou de *minimo*, como queriamos provar.

79. « E' preciso geometricamente destinar o calculo das variações a desenvolver a condição de *maximum* emanada do caracter fundamental sobre o estado estacionario, sempre proprio a taes problemas, aqui resolvidos pela annullação da variação da integral considerada. Nós devemos normalmente dirigir este desenvolvimento para o estabelecimento, constantemente realizavel, da equação differencial da curva procurada, cuja determinação será desde então entregue ao dominio ordinario da geometria integral, que permittirá raramente acabar a solução. Todas as regras proprias ao calculo das variações são espontaneamente emanadas do antigo calculo infinitesimal, quer quanto á dupla transposição da variação para com a differenciação ou a integração, quer para a lei de integração mutua, que fornece o principal recurso do novo calculo. Elaborada de modo a fazer gradualmente desapparecer a combinação da variação com a differenciação, a condição assim formulada para o *maximum* póde sempre confinar na equação differencial da curva procurada, addicionando-se os caracteres accessoriamente proprios aos limites, quando elles são variaveis. Guiado pelo caso fundamental, essencialmente relativo ás linhas planas, póde-se normalmente estender o methodo a curvas quaesquer, quer indifferentemente comparadas no espaço, quer escolhidas sobre uma superficie dada, á qual devem então convir as variações primitivamente livres. Referido aos problemas d'onde resultou o nome historico d'esta ordem de indagações, o methodo exige um supplemento geral, preliminarmente emanado do mais fecundo dos grandes geometras, para os casos em que a constancia de uma integral secundaria deve sempre acompanhar o *maximum* da principal. Basta então augmentar esta de um multiplo conveniente d'aquella, para tratar a somma independentemente d'essa condição, que se acha implicitamente considerada segundo a semelhança espontanea entre a formulação da constancia e a do *maximum* ». (Augusto Comte.)

80. Para que possamos fazer uma idéa sufficientemente exacta do methodo das variações, vamos resolver alguns problemas geometricos.

Elles serão escolhidos como typos de todas as questões que são do dominio do calculo das variações.

PROBLEMA I.— *Qual a linha que situada em um plano é o mais curto caminho entre dois pontos ?*

Solução. — Seja ds o elemento infinitesimal da linha procurada.

Supponhamos que no plano onde se acha situada esta linha sejam traçados dois eixos rectangulares.

Resultará que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Em virtude do principio de Kepler, relativo ao estado minimo de uma quantidade qualquer, teremos

$$\delta \int ds = 0 ;$$

ou

$$\delta . \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0.$$

Transpondo os signaes δ e $\int$, resulta

$$\int \delta \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0. \qquad (1)$$

Differenciando por δ, teremos

$$\delta \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx\ \delta\ dx + dy\ \delta .\ dy}{ds} = \frac{dx}{ds}\ \delta .\ dx +$$

$$+ \frac{dy}{ds}\ \delta .\ dy = \frac{dx}{ds}\ d .\ \delta\ x + \frac{dy}{ds}\ d .\ \delta\ y ;$$

d'onde a equação (1) ficará :

$$\int \left(\frac{dx}{ds}\ d .\ \delta\ x + \frac{dy}{ds}\ d .\ \delta\ y \right) = 0. \qquad (2)$$

Em virtude do principio do methodo de integração por partes, teremos :

$$\int \frac{dx}{ds}\, d.\, \delta x = \frac{dx}{ds}\, \delta x - \int \delta x d.\, \frac{dx}{ds},$$

$$\int \frac{dy}{ds}\, d.\, \delta y = \frac{dy}{ds}\, \delta y - \int \delta y\, d.\, \frac{dy}{ds};$$

d'onde a equação (2) ficará:

$$\left(\frac{dx}{ds}\, \delta x + \frac{dy}{ds}\, \delta y + \mathrm{K}\right) - \int \left(\delta y\, d. \frac{dx}{ds} + \delta y\, d. \frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad (3)$$

sendo K uma constante arbitraria, resultante da integração feita.

Para que a equação (3) tenha logar é necessario e sufficiente que se tenham as duas equações seguintes :

$$\delta x.\, d\, \frac{dx}{ds} + \delta y.\, d\, \frac{dy}{ds} = 0. \quad (4)$$

$$\frac{dx}{ds}\, \delta x + \frac{dy}{ds}\, \delta y + \mathrm{K} = 0. \quad (5)$$

A equação (4), para que possa ser verificada, será preciso que sejam separadamente nullos os coefficientes de $\delta\, x$ e $\delta\, y$. D'onde

$$d\, \frac{dx}{ds} = 0,\; d\, \frac{dy}{ds} = 0. \quad (6)$$

Taes são as equações differenciaes da linha procurada. E como qualquer que seja a linha plana que se considere, uma só equação é sufficiente para definil-a, concluiremos que as duas equações (6) são analogas para o mesmo fim.

Assim, lançando mão sómente da segunda, teremos:

$$d \frac{dy}{ds} = 0;$$

d'onde, integrando, virá:

$$\frac{dy}{ds} = C;$$

ou

$$\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = C;$$

d'onde

$$\frac{dy}{dx} = a,$$

sendo a uma constante arbitraria. Desta equação deduz-se:

$$dy = adx;$$

d'onde, finalmente, a equação finita

$$y = ax + b, \tag{7}$$

que é a equação de uma linha recta. Tal é, pois, o caminho minimo procurado.

81. *Determinação das constantes.*— Supponhamos primeiramente que os dois pontos sejam fixos. Sejam as suas coordenadas

$$x = x_1, \; y = y_1.$$
$$x = x_0, \; y = y_0.$$

Substituindo successivamente estes valores na equação (5), resulta:

$$\frac{dx_1}{ds} \delta x_1 + \frac{dy_1}{ds} \delta y_1 + K = 0,$$

$$\frac{dx_0}{ds} \delta x_0 + \frac{dy_0}{ds} \delta y_0 + K = 0.$$

Eliminando a constante K entre estas equações e simplificando virá :

$$(dx_1 \delta x_1 + dy_1 \delta y_1) - (dx_0 \delta x_0 + dy_0 \delta y_0) = 0. \qquad (8)$$

N'este caso, o de serem determinados os dois pontos, as coordenadas respectivas d'estes dois pontos serão quantidades constantes. Portanto, as suas differenciaes e variações serão nullas. Assim, a equação (8) é uma identidade evidente.

Mas, as coordenadas dos dois pontos dados devendo verificar a equação (7), teremos:

$$y_1 = ax_1 + b, \, y_0 = ax_0 + b ;$$

d'onde

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \, b = \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0},$$

portanto, a equação (7) se tornará em

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot x + \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0},$$

equação de uma recta unica.

Supponhamos agora que um dos pontos seja variavel e que o outro seja fixo. Sejam x_1, y_1 as coordenadas variaveis do primeiro ponto e x_0, y_0 as coordenadas constantes do segundo.

N'este caso, as differenciaes e variações do segundo ponto serão nullas.

Portanto, a equação (8) se reduzirá á fórma

$$dx_1 \, \delta x_1 + dy_1 \, \delta y_1 = 0 ;$$

d'onde

$$\frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{\delta y_1}{\delta x_1} = -1; \qquad (9)$$

isto é, que a recta representada pela equação (7) é normal á curva descripta pelo ponto variavel.

Seja

$$y_1 = f(x_1)$$

a equação d'esta curva.

Teremos:

$$\frac{\delta y_1}{\delta x_1} = f'(x_1).$$

Da equação (7) deduz-se:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = a;$$

d'onde a relação (9) se transformará em

$$af'(x_1) = -1.$$

Si a esta relação ajuntarmos as seguintes:

$$y_1 = ax_1 + b, \; y_0 = ax_0 + b,$$
$$y_1 = f(x_1),$$

teremos um systema de quatro equações que nos permittirão a determinação das constantes a e b, e das coordenadas variaveis x_1 e y_1.

Supponhamos, finalmente, que os dois pontos sejam variaveis ; ou, o que é o mesmo, que descrevam curvas representadas pelas equações

$$y_1 = f(x_1), \; y_0 = \varphi(x_0).$$

D'estas equações deduz-se:

$$\delta y_1 = f'(x_1)\, \delta x_1, \; \delta y_0 = \varphi'(x_0)\, \delta x_0.$$

Substituindo estes valores na equação (8), teremos:

$$[dx_1 + f'(x_1)\, dy_1]\, \delta x_1 - [dx_0 + \varphi'(x_0)\, dy_0]\, \delta x_0 = 0.$$

Ora, para que esta equação tenha logar será necessario e sufficiente que sejam separadamente nullos os coefficientes das variações δx_1 e δx_0. D'onde as duas equações seguintes:

$$1 + f'(x_1) \frac{dy_1}{dx_1} = 0,$$

$$1 + \varphi'(x_0) \frac{dy_0}{dx_0} = 0;$$

isto é, que a recta representada pela equação (7) seja simultaneamente normal ás curvas descriptas pelos seus dois termos. As equações

$$y_1 = ax_1 + b, \; y_0 = ax_0 + b$$

$$y_1 = f(x_1), \; y_0 = \varphi(x_0)$$

$$1 + af'(x_1) = 0, \; 1 + a\varphi'(x_0) = 0,$$

serão necessarias e sufficientes para a determinação das constantes a e b, e das coordenadas x_0, y_0, x_1, y_1.

82. PROBLEMA II. — *Qual a linha que situada no espaço é o caminho minimo entre dois pontos?*

Solução. — Seja ds um elemento infinitesimal da curva procurada.

Resultará que, pelo principio de Kepler,

$$\delta . \int ds = 0.$$

Por ser, em coordenadas rectangulares,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

teremos:

$$\delta . \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0;$$

d'onde, transpondo os signaes δ e $\int$, virá:

$$\int \delta . \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0;$$

ou, differenciando por δ,

$$\int \left(\frac{dx}{ds} \delta \, dx + \frac{dy}{ds} \delta . \, dy + \frac{dz}{ds} \delta \, dz \right) = 0;$$

d'onde, permutando as caracteristicas δ e d, resultará:

$$\int \left(\frac{dx}{ds} d.\delta x + \frac{dy}{ds} d.\delta y + \frac{dz}{ds} d.\delta z \right) = 0.$$

Integrando e designando por K a constante arbitraria, teremos:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z + K \right) - \int \left(\delta x d \frac{dx}{ds} + \right. \\ \left. \quad + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} \right) = 0. \end{array} \right\} \quad (10)$$

D'onde as equações seguintes:

$$\delta x d.\frac{dx}{ds} + \delta y d.\frac{dy}{ds} + \delta z d.\frac{dz}{ds} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z + K = 0. \quad (12)$$

Lancemos mão da equação (12). Para que ella possa verificar-se, façamos iguaes a zero os coefficientes das variações δx, δy e δz. Resultará:

$$d.\frac{dx}{ds} = 0, \; d.\frac{dy}{ds} = 0, \; d.\frac{dz}{ds} = 0. \quad (13)$$

Estas tres equações differenciaes da curva procurada não podem representa-la quando as considerarmos simultaneamente, pois sabe-se que duas quaesquer d'entre ellas são sufficientes para definil-a. Portanto, uma será superflua. Assim, tomemos as duas ultimas:

$$d.\frac{dy}{ds} = 0, \; d.\frac{dz}{ds} = 0.$$

Integrando-as, teremos:

$$\frac{dy}{ds} = A, \; \frac{dz}{ds} = B,$$

sendo A e B duas constantes arbitrarias. Substituindo o valor de ds, resultam as duas equações seguintes:

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{A^2}{1 - A^2} + \frac{A^2}{1 - A^2} \cdot \frac{dz^2}{dx^2},$$

$$\frac{dz^2}{dx^2} = \frac{B^2}{1 - B^2} + \frac{B^2}{1 - B^2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2};$$

d'onde, representando por a e b as constantes, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = a, \frac{dz}{dx} = b;$$

ou

$$dy = adx, dz = bdx.$$

Integrando, teremos:

$$y = ax + \alpha \text{ e } z = bx + \beta. \tag{14}$$

Taes são as equações finitas da linha procurada. Ellas nos fazem ver que, no espaço, o caminho minimo entre dois pontos é uma recta cuja posição é arbitraria.

83. *Determinação das constantes.*— Designemos por x_1 e y_1, x_0 e y_0 as coordenadas dos dois pontos que servem de termos á linha representada pelas equações (14). A equação (12) devendo ser verificada por essas coordenadas, teremos

$$\frac{dx_1}{ds} \delta x_1 + \frac{dy}{ds} \delta y_1 + \frac{dz_1}{ds} \delta z_1 + K = 0,$$

$$\frac{dx_0}{ds} \delta x_0 + \frac{dy_0}{ds} \delta y_0 + \frac{dz_1}{ds} \delta z_0 + K = 0;$$

d'onde, eliminando K e simplificando, resulta

$$\left.\begin{array}{l}(dx_1 \delta x_1 + dy_1 \delta y_1 + dz_1 \delta z_0) - (dx_1 \delta x_0 + dy_0 \delta y_0 + \\ \quad + dz_0 \delta z_0) = 0.\end{array}\right\} \tag{15}$$

Si os dois pontos extremos são dados, as suas coordenadas serão constantes.

Portanto, as variações e as differenciaes das coordenadas serão nullas. Assim, a equação (15) será uma identidade. N'este caso, as constantes que entram nas equações (14) serão determinadas por meio d'essas mesmas equações que devem ser simultaneamente verificadas pela substituição das constantes x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z_0 em logar das coordenadas variaveis x, y, z.

Si os dois pontos extremos da linha representada pelas equações (14) são forçados a permanecer sobre as curvas definidas por equações dadas, taes como as equações rectilineas

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x),\ z = \varphi(x), \\ y = \mathrm{F}(x),\ z = \psi(x), \end{array}\right\} \quad (16)$$

resultará que as coordenadas x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z_0 não serão quantidades dadas. N'este caso, a equação (15) poderá decompôr-se nas duas seguintes:

$$dx_1\, \delta x_1 + dy_1\, \delta y_1 + dz_1\, \delta z_1 = 0,$$

$$dx_0\, \delta x_0 + dy_0\, \delta y_0 + dz_0\, \delta z_0 = 0;$$

d'onde

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \dfrac{dy_1}{dx_1} \cdot \dfrac{\delta y_1}{\delta x_1} + \dfrac{dz_1}{dx_1} \cdot \dfrac{\delta z_1}{\delta x_1} = 0, \\ 1 + \dfrac{dy_0}{dx_0} \cdot \dfrac{\delta y_0}{\delta x_0} + \dfrac{dz_0}{dx_0} \cdot \dfrac{\delta z_0}{\delta x_0} = 0, \end{array}\right\} \quad (17)$$

são as equações que definem a condição de ser a recta representada pelas equações (14) normal ás duas curvas definidas pelas equações (16).

Para determinarmos as quatro constantes arbitrarias que entram nas equações (14) e as seis coordenadas dos dois extremos da recta representada por essas duas equações, teremos o systema das dez equações seguintes:

$$y_0 = ax_0 + \alpha,\ y_1 = ax_1 + \alpha,$$
$$z_0 = bx_0 + \beta,\ z_1 = bx_1 + \beta,$$
$$y_0 = f(x_0),\quad y_1 = \mathrm{F}(x_1),$$
$$z_0 = \varphi(x_0),\quad z_1 = \psi(x_1),$$
$$1 + af'(x_0) + b\,\varphi'(x_0) = 0,\ 1 + a\,\mathrm{F}'(x_1) + b\,\psi'(x_1) = 0.$$

que resolverão completamente o problema.

Qualquer que seja a condição determinada, a que devam satisfazer os dois pontos extremos da recta representada pelas equações (14), facilmente se comprehenderá o modo a empregar na determinação das constantes e das coordenadas dos referidos pontos. Não nos demoraremos mais n'este assumpto, que não é propriamente do dominio do calculo das variações.

84. PROBLEMA III.— *Sobre uma superficie dada, qual o mais curto caminho entre dois de seus pontos?*

Solução.— Seja

$$f(x, y, z) = 0$$

a equação rectilinea da superficie dada. Em virtude do principio de Kepler, relativo ao estado estacionario do maximo ou minimo de uma grandeza qualquer, teremos:

$$\delta \cdot \int ds = 0,$$

si ds designa, em coordenadas rectangulares, um elemento infinitesimal da curva procurada.

D'onde, por ser

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

teremos:

$$\int \delta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0.$$

Differenciando sob o signal $\int$, virá:

$$\int \left(\frac{dx}{ds} d.\delta x + \frac{dy}{ds} d.\delta y + \frac{dz}{ds} d.\delta z \right) = 0.$$

Integrando, teremos:

$$\left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z + K \right) - \int \left(\delta x \, d \frac{dx}{ds} + \right.$$

$$\left. + \delta y \, d \frac{dy}{ds} + \delta z \, d \frac{dz}{ds} \right) = 0,$$

sendo K uma constante arbitraria. Para que esta equação possa ter logar, será necessario e sufficiente que a decomponhamos nas duas equações seguintes :

$$\delta x d. \frac{dx}{ds} + \delta y d. \frac{dy}{ds} + \delta z d. \frac{dz}{ds} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z + K = 0. \tag{19}$$

A equação da superficie dada,

$$f(x, y, z) = 0,$$

sendo supposta conter a curva procurada, não deixa *inteiramente absoluta* a condição de minimo, como nos dois problemas precedentes.

E' uma relação que vem ligar as variações das coordenadas dos differentes pontos, pois d'ella deduz-se :

$$\frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y + \frac{df}{dz} \delta z = 0 ;$$

d'onde

$$\delta z = - \frac{\frac{df}{dx} \delta x + \frac{df}{dy} \delta y}{\frac{df}{dz}}.$$

Substituinto este valor na equação (18), teremos :

$$\delta x \left(d \frac{dx}{ds} - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} d \frac{dz}{ds} \right) + \delta y \left(d \frac{dy}{ds} - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}} d \frac{dz}{ds} \right) = 0;$$

d'onde as duas equações seguintes :

$$d. \frac{dx}{ds} - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} d. \frac{dz}{ds} = 0, \quad d. \frac{dy}{ds} - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}} d. \frac{dz}{ds} = 0. \tag{20}$$

Taes são as equações differenciaes da curva procurada, as quaes raramente poderão ser integradas. A equação

(19), devendo ser verificada pelas coordenadas dos dois extremos da curva, nos forneceria a equação relativa aos limites da mesma curva ; as constantes se determinariam como nos problemas precedentes.

85. *Primeiro exemplo.* — Seja a superficie plana representada em coordenadas rectangulares pela equação

$$z + ax + by + c = 0.$$

Procuremos a linha mais curta entre dois quaesquer de seus pontos. As equações (20) dão-nos:

$$d.\ \frac{dx}{ds} = ad.\ \frac{dz}{ds},\quad d.\ \frac{dy}{ds} = bd.\ \frac{dz}{ds};$$

d'onde, integrando-as, teremos :

$$\frac{dx}{ds} = a\ \frac{dz}{ds},\quad \frac{dy}{ds} = b\ \frac{dz}{ds};$$

ou

$$dx = adz,\quad dy = bdz;$$

d'onde, integrando ainda, virá :

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta.$$

86. *Segundo exemplo.* — Seja, em coordenadas rectangulares, a superficie espherica representada pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

e procuremos a menor distancia medida entre dois quaesquer de seus pontos. As equações (20) serão n'este caso as seguintes :

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) - \frac{x}{z}\,d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) - \frac{y}{z}\,d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0;$$

d'onde, suppondo ds constante, resultará :

$$\frac{zd^2x - xd^2z}{ds} = 0,$$

ou

$$\frac{d\,(zdx - xdz)}{ds} = 0,$$

e

$$\frac{zd^2y - yd^2z}{ds} = 0,$$

ou

$$\frac{d\,(zdy - ydz)}{ds} = 0\,;$$

d'onde, integrando-as, teremos :

$$\frac{zdx - xdz}{ds} = \mathrm{C}, \quad \frac{zdy - ydz}{ds} = \mathrm{C}'.$$

Dividindo a primeira pela segunda, virá :

$$\frac{zdx - xdz}{zdy - ydz} = \mathrm{A},$$

ou

$$zdx - xdz = \mathrm{A}\,(zdy - ydz)\,;$$

d'onde, multiplicando por

$$\frac{1}{z^2},$$

teremos :

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} = \mathrm{A}\,\frac{zdy - ydz}{z^2},$$

ou

$$d\,\frac{x}{z} = \mathrm{A}d\frac{y}{z}\,;$$

integrando, finalmente, resultará :

$$x = \mathrm{A}y + \mathrm{B}z,$$

que é evidentemente a equação rectilinea d'um plano que passa pela origem das coordenadas. Esta equação nos indica

que a curva procurada resulta da intersecção d'um plano com a esphera dada. Ora, a esphera dada tendo para centro a origem das coordenadas e o plano representado pela equação $x = Ay + Bz$, passando pelo centro da esphera, conclue-se necessariamente que a curva procurada será um grande circulo da esphera. Assim, os dois pontos tomados na superficie d'uma esphera têm para caminho *minimo* o arco de grande circulo que por elles passar. A constante da equação do circulo, bem como as coordenadas dos dois pontos seriam determinadas como precedentemente.

87. *Terceiro exemplo.* — Supposta a superficie cylindrica representada pela equação rectilinea e referida a eixos rectangulares,

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

pede-se a linha que sobre essa superficie é o mais curto caminho entre dois de seus pontos.

A equação (18) do numero (84) sendo

$$\delta\, xd.\frac{dx}{ds} + \delta\, yd.\frac{dy}{ds} + \delta\, zd.\frac{dz}{ds} = 0,$$

ficará, pela substituição do valor de $\delta\, y$ deduzido da equação da superficie dada, com a fórma seguinte:

$$\left(d\frac{dx}{ds} - \frac{x}{y}\, d\frac{dy}{ds}\right)\delta\, x + \left(d\frac{dz}{ds}\right)\delta\, z = 0;$$

d'onde

$$d\frac{dx}{ds} - \frac{x}{y}\, d\frac{dy}{ds} = 0,\; d\frac{dz}{ds} = 0.$$

Taes serão as equações differenciaes da curva procurada. Da primeira deduz-se:

$$\frac{d\dfrac{dx}{ds}}{x} = \frac{d\dfrac{dy}{ds}}{y} = d\,\lambda,$$

sendo $d\lambda$ o valor commum dos dois membros d'esta equação. D'onde

$$d\frac{dx}{ds} = x\,d\lambda,\; d\frac{dy}{ds} = y\,d\lambda.$$

Multiplicando-as respectivamente por

$$\frac{dx}{ds} \text{ e } \frac{dy}{ds},$$

virá:

$$\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds} = x\,d\,x\frac{d\lambda}{ds},\; \frac{dy}{ds}\,d\frac{dy}{ds} = y\,d\,y\frac{d\lambda}{ds}.$$

Sommando-as, membro a membro, teremos:

$$\left(\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\frac{d\lambda}{ds}\right) = (xdx + ydy)\frac{d\lambda}{ds};$$

ou

$$d\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] = (2\,x\,d\,x + 2\,y\,d\,y)\frac{d\lambda}{2\,ds}.$$

Por ser evidentemente nullo o primeiro membro d'esta equação, teremos :

$$2\,x\,d\,x + 2\,y\,d\,y = 0,$$

ou

$$d\,x^2 + d\,y^2 = 0\;;$$

d'onde, integrando, virá :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

sendo R uma constante arbitraria.

Da segunda equação differencial da curva procurada deduz-se :

$$\frac{dz}{ds} = const.\;;$$

isto é, que a curva procurada é tal que a sua tangente

faz um angulo constante com a geratriz. D'esta equação resulta:

$$z = cs\,;$$

a constante da integração é nulla pois que $z = 0$, para $s = 0$.

Assim, as equações finitas da curva procurada serão:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

$$z = c\,s.$$

Ellas pertencem a uma helice. Quanto ás coordenadas dos dois pontos é já sabido o meio para determinal-as.

88. PROBLEMA IV.— *D'entre todas as curvas planas isoperimetros, qual a curva cuja área limitada pelas coordenadas dos seus pontos extremos é um maximo ou minimo?*

Solução.— Suppondo que (x_1, y_1), (x_0, y_0) sejam as coordenadas dos pontos extremos, a área d'uma curva plana qualquer, em coordenadas rectangulares, nos será dada pela expressão

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx.$$

O perimetro do arco da mesma curva, no mesmo systema de coordenadas, será

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Por serem do mesmo comprimento os arcos de todas as curvas planas consideradas, a expressão precedente será uma quantidade constante. Multiplicando-a pelo factor constante λ e sommando o producto com a integral que deve ser um *maximo* ou um *minimo*, resultará:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(y\,dx + \lambda\sqrt{dx^2 + dy^2}\right).$$

Em virtude do principio de Kepler, teremos a equação

$$\delta . \int (y\, dx + \lambda \sqrt{dx^2 + dy^2}) = 0 ; \qquad (21)$$

d'onde

$$\int (\delta\, y .\, dx + \lambda \delta .\, \sqrt{dx^2 + dy^2}) = 0 ;$$

ou, suppondo que x seja a unica variavel independente, teremos:

$$\int \left(y d . \delta\, x + \lambda \frac{dx}{ds}\, d .\, \delta\, x \right) = 0, \qquad (22)$$

por ser

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} .$$

A equação (22) poderá ser escripta assim:

$$\int \left(y + \lambda\, \frac{dx}{ds} \right) d .\, \delta\, x = 0 ;$$

d'onde, integrando, vem:

$$\left(y + \lambda \frac{dx}{ds} + K \right) \delta\, x - \int \delta\, x .\, d \left(y + \lambda\, \frac{dx}{ds} \right) = 0; \qquad (23)$$

sendo K uma constante.

Da equação (23) deduz-se:

$$y + \lambda \frac{dx}{ds} + K = 0, \qquad (24)$$

$$d \left(y + \lambda \frac{dx}{ds} \right) = 0. \qquad (25)$$

A equação (25), integrada, dá-nos:

$$y + \lambda\, \frac{dx}{ds} = const. ;$$

ou

$$y + \lambda \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = b ;$$

d'onde

$$y - b = -\lambda \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}};$$

ou

$$(y - b)^2 = \lambda^2 \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2};$$

ou

$$(y - b)^2 dx^2 + (y - b)^2 dy^2 = \lambda^2 dx^2;$$

d'onde

$$[(y - b)^2 - \lambda^2] dx^2 = -(y - b)^2 dy^2;$$

d'onde

$$dx^2 = \frac{(y - b)^2 dy^2}{\lambda^2 - (y - b)^2};$$

ou

$$dx = \frac{(y - b)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y - b)^2}}.$$

Fazendo

$$z = \sqrt{\lambda^2 - (y - b)^2}$$

e differenciando, virá:

$$-dz = \frac{(y-b)dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y-b)^2}}.$$

Portanto,

$$dx = -dz;$$

d'onde

$$x = -z + a;$$

ou

$$x - a = -\sqrt{\lambda^2 - (y-b)^2};$$

ou, finalmente,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2.$$

Tal é a equação da curva procurada. Como vê-se, a curva em questão é uma circumferencia de circulo.

Quanto á determinação das constantes a, b e λ a equação (24) nos permittiria facilmente.

Em ser a curva procurada de área maxima ou minima, facilmente se comprehenderá que esse criterio depende tão sómente do signal da variação de segunda ordem da integral que constitue o primeiro membro da equação (21), signal que deve ser negativo para o caso de área maxima e positivo para o caso de área minima. Mas, em uma tão simples applicação geometrica do calculo das variações, como a que acabamos de fazer, mui complicada é essa questão. Entretanto, podemos, por considerações geometricas, reconhecer que o circulo é a curva fechada que, sob o mesmo perimetro, circumscreve a área *maxima*.

Observação.—Muitos outros problemas poderiam servir de uteis exercicios sobre as regras do calculo das variações; mas, bastam os que apresentamos: elles são os que nos pareceram mais proprios para ensinar o modo de resolver todas as questões do dominio de tão alto instrumento de indagação mathematica. Para uma exacta comprehensão do emprego estatico e dynamico que havemos de fazer do methodo das variações, não é mister mais longo desenvolvimento: tambem não seria razoavel que commettessemos um exagero didactico.

FIM DA PRIMEIRA PARTE.

SEGUNDA PARTE

ESTATICA

CAPITULO I

THEORIA DA COMPOSIÇÃO DAS FORÇAS

1. FORÇAS CONVERGENTES

89. *Parallelogrammo das forças.*— A lei de Galileo, como vimos sufficientemente, institue de um modo espontaneo a regra fundamental da composição das translações e a constante proporcionalidade entre as velocidades instantaneamente impressas a um mesmo ponto material e as forças capazas de produzil-as. O parallelogrammo das translações, após esta proporcionalidade, deve tomar o nome de *parallelogrammo das forças,* cuja regra nos permitte estabelecer a theoria da composição das forças convergentes.

Assim, em virtude da lei de Galileo, o ponto A (fig. 22), solicitado pela acção combinada das forças P e Q, chegará, n'um mesmo tempo, á mesma posição a que chegaria si ellas actuassem successivamente, cada uma por sua vez; isto é, a força representada em grandeza e direcção por AP actuaria desde o ponto A até o ponto P; a força representada em grandeza e direcção por AQ actuaria desde o ponto P até o ponto R; mas, como as acções são simultaneas e não successivas, o ponto A seguirá até o ponto R descrevendo a diagonal AR directamente, em grandeza e direcção.

Portanto, todas as questões que podemos propôr sobre a composição de duas forças em uma unica força e sobre a decomposição de uma força em duas outras, são referidas á resolução de um triangulo. Si as componentes AP e AQ são dadas em grandeza e direcção, bem como o angulo de suas direcções, o triangulo APR dá-nos:

$$\overline{AR}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PR}^2 - 2 . \overline{AP} . \overline{PR} \cos P,$$

ou, dispensando a lettra A que representa o ponto de concurso das forças e attendendo a que $PR = AQ$,

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2 P . Q \cos P = P^2 + Q^2 - 2 PQ \cos (180 - PAQ) ;$$

d'onde

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 PQ \cos (P, Q) ; \qquad (1)$$

isto é, que *o quadrado da resultante de duas forças dadas equivale á somma dos quadrados das componentes, mais o dobro de seu producto pelo coseno de sua inclinação mutua.*

Do mesmo triangulo APR deduz-se:

$$\frac{P}{sen\ \alpha} = \frac{Q}{sen\ \beta} = \frac{R}{sen\ (P,Q)} ; \qquad (2)$$

isto é, que *cada força é proporcional ao seno do angulo formado pelas direcções das duas outras.*

D'estas equações facilmente resultam as expressões seguintes:

$$sen\ \alpha = \frac{P}{R} sen\ (P,Q) \quad , \quad sen\ \beta = \frac{Q}{R} sen\ (P,Q)$$

$$P = R \frac{sen\ \alpha}{sen\ (P,Q)} \quad , \quad Q = R \frac{sen\ \beta}{sen\ (P,Q)} ;$$

d'onde, multiplicando respectivamente estas duas expressões por $\cos \beta$ e $\cos \alpha$ e sommando-as membro a membro, virá:

$$P \cos \beta + Q \cos \alpha = R \frac{sen\ \alpha \cos \beta + sen\ \beta \cos \alpha}{sen\ (P,Q)} = R \frac{sen\ (\alpha + \beta)}{sen\ (P,Q)} ;$$

ou

$$R = P \cos \beta + Q \cos \alpha ; \qquad (3)$$

isto é, que *a intensidade da resultante de duas forças convergentes é representada pela somma das projecções d'estas forças sobre a direcção da propria resultante.*

Si d'um ponto qualquer D, tomado sobre a direcção da resultante, abaixamos as perpendiculares $DB = p$ e $DC = q$ sobre as direcções das componentes, teremos:

$$p = AD\ sen\ \beta \quad , \quad q = AD\ sen\ \alpha; \qquad (4)$$

d'onde

$$\frac{q}{p} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta};$$

mas, em vista das proporções (2),

$$\frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta} = \frac{P}{Q};$$

portanto,

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p};$$

isto é, que *as componentes estão entre si na razão inversa das perpendiculares abaixadas sobre as suas direcções, d'um ponto qualquer da direcção da resultante.*

Reciprocamente, *si as componentes estão na razão inversa das perpendiculares sobre as suas direcções, tiradas d'um ponto tomado em seu plano, este ponto pertencerá á direcção da resultante*. Com effeito, si a equação precedente tem logar, substituamos os valores (4) de p e q. Virá:

$$\frac{P}{Q} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta},$$

proporção que determina a direcção da resultante.

Baseando-nos n'esta reciproca, podemos considerar a resultante como sempre dirigida segundo uma recta cujas distancias de cada ponto ás direcções das componentes são inversamente proporcionaes ás grandezas das mesmas componentes. E' por meio d'essa propriedade da resultante que a sua determinação fica independente do ponto de concurso das componentes.

90. *Corollarios.*— Da equação (1) são facilmente deduzidas as consequencias seguintes:

1.º Si as forças P e Q são perpendiculares, o angulo $(P,Q) = 90°$ e

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

2.º Si coincidem em direcção e sentido, o angulo $(P,Q) = o$ e

$$R = P + Q.$$

3.º Si coincidem em direcção, mas são de sentidos contrarios, o angulo $(P,Q) = 180°$ e

$$R = P - Q$$

4.º Si são iguaes e contrarias,

$$R = o.$$

91. *Polygono das forças.*— Conhecido o caso fundamental da composição de duas forças convergentes, podemos determinar a resultante de muitas forças P, Q, R, S, etc. (fig. 23), applicadas a um mesmo ponto A e dirigidas d'uma maneira qualquer.

Para isto, consideremos duas quaesquer das forças dadas. Sejam ellas P e Q. Compostas pela regra do parallelogrammo, teremos a resultante X. Compondo esta força X com a força R, teremos, pela mesma regra, a resultante Y. Combinando esta força Y com a força S, teremos a resultante Z. E assim por diante.

Si as forças dadas estão todas n'um mesmo plano, as resultantes X, Y, Z, etc., tambem se acharão situadas n'esse plano.

Vemos, por essa composição successiva de differentes forças convergentes, que, si descrevemos no espaço um

contorno polygonal, cujos lados sejam successivamente parallelos e proporcionaes a essas forças, a recta que fecha o contorno e, portanto, termina o polygono, é parallela e proporcional á resultante total d'essas mesmas forças. A ordem em que os lados parallelos ás forças se succedem é indifferente. Quando o polygono fechar-se por si mesmo, a resultante total será nulla e todas as forças se acharão em equilibrio em torno do ponto de concurso.

92.—CASO PARTICULAR.—*Parallelipipedo das forças.*— Consideremos especialmente a composição das tres forças X, Y,Z, applicadas a um mesmo ponto A (fig.24) e não situadas n'um mesmo plano. Sejam $X = A\,B$, $Y = AC$, $Z = A\,D$, as tres forças dadas. Pelo ponto C da força AC, tiremos Ca igual e parallela á AB e pelo ponto a tiremos $a\,R$ igual e parallela á AD: a recta AR, que fecha o contorno $ACaR$, será a resultante geral das tres forças dadas.

Esta resultante será sempre a mesma, qualquer que seja a força pela qual comecemos a composição e qualquer que seja a ordem em que sejam traçadas as parallelas ás forças dadas. Com effeito, comecemos pela mesma força AC e, em logar de tirarmos Ca e aR, tiremos Cc igual e parallela á AD e cR igual e parallela á AB: chegaremos da mesma maneira ao ponto R e AR será a resultante. Si começassemos pela força AB poderiamos tirar Ba igual e parallela á AC e aR igual e parallela á AD ou tirar Bb igual e parallela á AD e bR igual e parallela á AC. Si, finalmente, começassemos pela força AD poderiamos ir ao ponto R tirando Dc e cR iguaes e parallelas respectivamente ás forças AC e AB, ou tirando Db e bR iguaes e parallelas respectivamente ás forças AB e AC.

Portanto, de qualquer maneira que fizermos a composição das tres forças dadas, obteremos sempre a diagonal AR do parallelipipedo construido sobre essas tres forças; isto é, que *a resultante de tres forças convergentes não situadas em um mesmo plano é representada em grandeza e direcção pela diagonal do parallelipipedo construido sobre as mesmas forças.*

93. *Corollario.* — Si o parallelipipedo é rectangulo, teremos:

$$\overline{AR}^2 = \overline{Aa}^2 + \overline{Ra}^2;$$

mas,

$$\overline{Aa}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2,$$

$$\overline{Ra}^2 = \overline{AD}^2;$$

portanto,

$$\overline{AR}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2,$$

ou

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

d'onde

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad (5)$$

será a expressão do valor da resultante em funcção das tres componentes dadas.

94. Para termos as expressões das tres componentes em funcção da resultante e dos angulos que a direcção d'esta força faz respectivamente com as suas direcções, designemos por (α, β, γ) estes angulos e liguemos a extremidade R da resultante aos pontos B, C e D. Resultarão tres triangulos rectangulos que terão a diagonal AR para hypothenusa; donde

$$X = R \cos \alpha, \; Y = R \cos \beta, \; Z = R \cos \gamma, \qquad (6)$$

Quando X, Y, Z forem dadas, a equação (5) nos dará o valor da resultante e as equações (6) nos darão os angulos (α, β, γ) que definem a sua direcção. Si, inversamente, a força R é dada em grandeza e direcção e queremos decompol-a em tres forças rectangulares entre si, as equações (6) resolverão o problema.

95. *Calculo da resultante de um numero qualquer de forças dadas.*— Sejam P', P'', P''', etc., as forças convergentes dadas. No ponto de concurso supponhamos a origem

de tres eixos rectangulares fixos. Designemos por $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, $(\alpha''', \beta''', \gamma''')$ etc., os angulos que respectivamente fazem as forças dadas com os eixos coordenados. Decomponhamos cada uma d'estas forças em tres outras dirigidas segundo os eixos e teremos:

$P' \cos \alpha'$, $P' \cos \beta'$, $P' \cos \gamma'$.... *para componentes da força* P' ;

$P'' \cos \alpha''$, $P'' \cos \beta''$, $P'' \cos \gamma''$.... *para componentes da força* P'' ;

$P''' \cos \alpha'''$, $P''' \cos \beta'''$, $P''' \cos \gamma'''$... *para componentes da força* P''' ;

etc., etc. Designemos por X, Y, Z, as sommas parciaes das componentes segundo os eixos dos x, dos y e dos z. Resultarão as equações seguintes :

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + etc, = \Sigma\,(P \cos \alpha),$$
$$Y = P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + etc = \Sigma\,(P \cos \beta),$$
$$Z = P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + etc = \Sigma\,(P \cos \gamma),$$

o signal Σ designando somma de termos analogos.

As tres equações precedentes nos permittem reduzir o systema de forças dadas a tres unicas forças X, Y, Z. Si agora, pela regra do parallelipipedo das forças, compuzermos estas tres forças em uma unica força R, teremos :

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 ;$$

d'onde

$$R = \sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)} = \sqrt{[\Sigma\,(P \cos \alpha)]^2 + [\Sigma (P \cos \beta)]^2 + [\Sigma\,(P \cos \gamma)]^2},$$

será a expressão do valor da resultante. Designando por (a, b, c) os angulos que a força R faz respectivamente com os mesmos eixos, teremos :

$$X = R \cos a,\ Y,\ R \cos b,\ Z = R \cos c ;$$

d'onde

$$\cos a = \frac{X}{R} = \frac{\Sigma\,(P \cos \alpha)}{\sqrt{[\Sigma (P \cos \alpha)] +^2) [\Sigma\,(P \cos \beta)] +^2 [\Sigma\,(P \cos \gamma)]^2}}$$

$$\cos b = \frac{Y}{R} = \frac{\Sigma (P \cos \beta)}{\sqrt{[\Sigma (P \cos \alpha)]^2 + [\Sigma (P \cos \beta)]^2 + [\Sigma (P \cos \gamma)]^2}}$$

$$\cos c = \frac{Z}{R} = \frac{\Sigma (P \cos \gamma)}{\sqrt{[\Sigma (P \cos \alpha)]^2 + [P \cos \beta)]^2 + [\Sigma (P \cos \gamma)]^2}}$$

serão as expressões que definem a direcção da resultante.

96. A intensidade da resultante poderá tambem ser calculada em funcção das forças dadas e dos angulos comprehendidos entre as suas direcções. Com effeito, designemos por (P', P''), (P', P'''), (P'', P'''), etc., os angulos comprehendidos entre as direcções das forças dadas e lancemos mão das relações seguintes:

$$\cos (P', P'') = \cos \alpha' \cos \alpha'' + \cos \beta' \cos \beta'' + \cos \gamma' \cos \gamma'',$$

$$\cos (P', P''') = \cos \alpha' \cos \alpha''' + \cos \beta' \cos \beta''' + \cos \gamma' \cos \gamma''',$$

$$\cos (P'' P''') = \cos \alpha'' \cos \alpha''' + \cos \beta'' \cos \beta''' + \cos \gamma'' \cos \gamma''',$$

....

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' \cos^2 \gamma' = 1,$$

$$\cos^2 \alpha'' + \cos^2 \beta'' + \cos^2 \gamma'' = 1,$$

$$\cos^2 \alpha''' + \cos^2 \beta''' + \cos^2 \gamma''' = 1,$$

etc., etc. Isto posto, elevemos respectivamente ao quadrado cada uma das equações estabelecidas precedentemente,

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + etc,$$

$$Y = P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + etc,$$

$$Z = P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + etc,$$

e teremos:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = P'^2 + P''^2 + P'''^2 + etc +$$
$$+ 2 P' P'' \cos (P', P'') + 2 P' P''' \cos (P', P''') +$$
$$+ 2 P'' P''' \cos (P''', P'') + etc;$$

d'onde, por ser

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

virá :

$$R^2 = P'^2 + P''^2 + P'''^2 + etc + 2\ P'\ P''\ \cos\ (P', P'') +$$
$$+ 2\ P'\ P'''\ \cos\ (P', P''') + etc,$$

fórmula que nos permitte calcular a intensidade da resultante independentemente dos angulos que as forças dadas fazem com os tres eixos.

97. *Decomposição das forças*.—As leis da decomposição das forças convergentes são exactamente as mesmas que as da composição, cujo estudo podemos dar por terminado; mas, no intuito de facilitar a intelligencia dos differentes gráos de indeterminação que surgem quando temos necessidade de decompôr uma força dada em muitas outras, consideremos especialmente alguns problemas de decomposição.

Como o caso do parallelogrammo estabelece o principio fundamental da composição é claro que elle nos dará tambem a decomposição das forças. A simples resolução de um triangulo rectilineo nos ensina o modo de decompôr uma força em duas outras, em todos os casos possiveis, pois as intensidades da resultante e das componentes são representadas pelos tres lados de um triangulo rectilineo, cujos angulos são os que a resultante faz respectivamente com as componentes e o supplemento do angulo por estas comprehendido. Resulta que sendo dados tres d'estes seis elementos, as tres forças e os tres angulos comprehendidos entre as suas direcções, poderemos achar os outros tres pela resolução de um triangulo. Entre os elementos dados, a grandeza de uma das forças, pelo menos, deve ser considerada, para que o problema seja possivel.

Examinemos os differentes casos da decomposição d'uma força em duas outras.

1º *As direcções das duas componentes são dadas.*—Seja R (fig. 25) a força dada e sejam X e Y as direcções dadas.

Para que o problema possa ter lugar é preciso que a resultante R esteja situada no plano $Y\ A\ X$. Si isto é

supposto, pela extremidade R tracemos a linha $R\ P$ parallela á direcção $A\ Y$ e a linha $R\ Q$ parallela á direcção $A\ X$. Resultarão as componentes $A\ P$ e $A\ Q$ sobre as direcções dadas. Os seus valores serão, designando-as simplesmente por P e Q,

$$P = R \frac{sen\ (Q,\ R)}{sen\ (P,\ Q)},\quad Q = R \frac{sen\ (P,\ R)}{sen\ (P,\ Q)}.$$

Si os eixos AX e AY forem rectangulares, o angulo $(P, Q) = 90$;

donde

$$P = R\, sen\, (Q,\ R) = R\, cos\, (P,\ R)$$

$$Q = R\, sen\, (P,\ R) = R\, cos\, (Q,\ R).$$

2.º *São dadas as intensidades das componentes.*— Seja R a resultante dada e sejam P e Q as grandezas das componentes dadas. Si P e Q são iguaes, haverá uma unica solução. Si P e Q são desiguaes, haverá duas soluções. Si a resultante R fôr maior que a somma $P + Q$ ou menor que a differença $P - Q$ não será possivel a construcção d'este caso.

3.º *Uma das componentes é dada em grandeza e direcção.*—Sejam R (fig. 26) a resultante e P a componente dada. Pelo ponto A tirando-se uma parallela AQ á recta que une o ponto R ao ponto P, tem-se achado a unica solução do problema, sempre possivel.

4.º *Uma das componentes é dada em direcção e a outra em intensidade.* Este caso da construcção de triangulos, pode-nos offerecer duas soluções, ou uma solução, ou ser impossivel. Sejam R a resultante (fig 27) e AX a direcção da componente dada.

Si a grandeza da componente dada fôr maior que a perpendicular RD tirada do ponto R para o eixo AX, haverá duas soluções; si for igual, haverá uma unica solução e as componentes serão perpendiculares entre si; e si fôr menor, não se poderá construir o triangulo das forças.

98. Depois do exame dos differentes casos precedentes, passemos á *decomposição d'uma força em tres outras*. Vimos, no exame da composição de tres forças concurrentes e dirigidas em planos differentes, que a resultante é representada pela diagonal do parallelipipedo cujas arestas contiguas são as grandezas das componentes. Portanto, o problema da decomposição d'uma força em tres outras só poderá ser determinado quando forem dadas as direcções das componentes; pois, si mesmo forem dadas as intensidades d'estas forças, o problema da construcção do polyedro admittirá necessariamente uma infinidade de soluções; isto é, com tres forças dadas sómente em intensidade, poderemos construir um numero infinito de parallelipipedos, tendo todos a mesma diagonal.

Supponhamos, pois, que sejam dadas as direcções das tres componentes d'uma força R: quaes serão as suas intensidades?

Dois casos distinguiremos:

1.° *As direcções dadas não se acham sobre um mesmo plano e a força dada acha-se situada no espaço.*— Seja AR (fig. 28) a força dada e sejam AX, AY e AZ as direcções dadas.

Decomponhamos primeiro a força AR em duas outras: uma AD segundo AZ e outra AE segundo a intersecção Ax do plano RAD com o plano XAY. Decomponhamos agora a força AE em duas outras: uma AB segundo o eixo AX e outra AC segundo o eixo AY. As componentes AB, AC e AD são as forças procuradas.

2.° *As direcções dadas bem como a força dada são existentes n'um mesmo plano.*— Sejam AX, AY e AZ (fig. 28) as direcções dadas. Decomponhamos primeiro a força AR em duas outras: uma AD sobre o eixo AZ e outra AE segundo uma direcção auxiliar qualquer Ax, situada no plano dado. Decomponhamos agora a força AE em duas outras: uma AB segundo o eixo AX e outra AC segundo a direcção AY. As componentes procuradas são, pois, AB, AC e AD.

Por ser a linha auxiliar Ax de direcção arbitraria o problema é indeterminado e haverá um numero infinito de soluções.

99. Si quizermos decompôr uma força dada em quatro outras, cujas direcções sejam conhecidas, todas situadas n'um mesmo plano, o problema será mais indeterminado que nos casos precedentes. Com effeito, seja a força R a decompôr segundo as direcções a, b, c, d. Decomponhamos a força R em duas outras : uma segundo a direcção a e outra R' segundo uma direcção auxiliar x traçada no plano dado. Decomponhamos agora a força R' em duas outras : uma segundo a direcção b e outra R'' segundo uma nova direcção auxiliar x' traçada tambem no plano dado. Decomponhamos, finalmente, a força R'' em duas outras : uma segundo a direcção c e outra segundo a direcção d.

As direcções auxiliares x e x' sendo arbitrarias, o problema admittirá um numero infinito de soluções.

100. O caso geral, o da decomposição de uma força dada em um numero qualquer de componentes sobre direcções dadas, é de uma indeterminação tal que nos dispensamos de consideral-o. Basta que nos limitemos aos casos precedentes, para que estejamos certos de que as leis da decomposição das forças são as mesmas que as da composição de cujo estudo, no caso da convergencia, ficam dadas as fórmulas geraes e estabelecidos todos os methodos que a sciencia possue.

2. FORÇAS PARALLELAS

101. Sejam P e Q duas forças parallelas e dirigidas no mesmo sentido, applicadas respectivamente em dois pontos A e B (fig. 29) invariavelmente ligados pela recta AB. Dois são os methodos principaes que a sciencia possue para a determiminação da resultante d'essas duas forças. O primeiro, que devemos a Varignon, consiste em considerarmos as forças parallelas como convergentes no infinito ; e o segundo, devido

a D'Alembert, consiste na substituição do systema das duas forças parallelas por um equivalente systema de quatro forças, cuja composição é facilmente reduzida ao caso da convergencia.

1º. *Methodo.* — Supponhamos (fig. 30) as forças convergentes P e Q applicadas no ponto A e seja R a sua resultante. Dissemos que, em virtude da propriedade de ser esta força dirigida segundo uma recta cujas distancias de um qualquer de seus pontos D ás direcções PB e QC de suas componentes são inversamente proporcionaes ás mesmas componentes, ficava a determinação da resultante independente do ponto de concurso d'estas forças. E' o que facilmente se verifica do simples exame d'esta figura : as forças P, Q e R podem ser mudadas respectivamente para pontos quaesquer de suas direcções, taes como B, C e D. D'este ponto D, tiradas as perpendiculares p e q, as equações já estabelecidas,

$$R = P \cos \beta + Q \cos \alpha, \qquad \frac{P}{Q} = \frac{q}{p},$$

determinarão a resultante em intensidade e direcção, independentemente do ponto de concurso das componentes, determinação esta que poderá ser algebrica ou geometrica.

As equações precedentes sendo, como são, geraes, subsistirão em todos os casos, qualquer que seja o afastamento dos pontos A e D. Imaginemos, pois, que o ponto A seja afastado do ponto D n'uma distancia infinitamente grande : então os angulos α e β se annullarão, as forças P e Q se tornarão parallelas e as distancias p e q serão os segmentos de uma mesma recta BDC. Resultarão, pois, das equações precedentes, as equações seguintes :

$$R = P + Q, \quad \frac{P}{Q} = \frac{q}{p}.$$

Ellas significam que *a resultante d'um systema de duas forças parallelas e do mesmo sentido, applicadas*

em dois pontos invariavelmente ligados, é parallela a estas forças, do mesmo sentido que ellas e igual á sua somma. O seu ponto de applicação divide a recta de ligação das componentes em partes inversamente proporcionaes ás intensidades d'estas forças.

A primeira das equações precedentes tambem poderia ser deduzida da equação

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\ P\ Q \cos (P, Q),$$

fazendo-se nullo o angulo das componentes.

102. 2.º *Methodo.*—Nos pontos A e B, ligados por uma linha invariavel (fig. 31), appliquemos duas forças F e $-F$, iguaes e contrarias, actuando segundo a direcção da recta AB.

Por ser nullo o effeito d'estas duas forças que se equilibram, o systema das forças parallelas e do mesmo sentido P e Q não será modificado em seus effeitos. Em logar, pois, do systema d'estas duas forças, teremos agora o systema das quatro forças $(-F, P)$, (F, Q). Pela regra do parallelogrammo componhamos as forças convergentes em A e B. Teremos as resultantes S e T. Mudemos os pontos A e B de applicação d'estas forças para o ponto D commum ás suas direcções. N'este ponto, decomponhamos as forças S' e T', respectivamente iguaes a S e T, cada uma em duas outras. As componentes de S' serão: $-F'$, igual e parallela á força $-F$, e Q', igual e parallela á força Q. As componentes de T' serão: F', igual e parallela á força F, e P', igual e parallela á força P.

Evidentemente as componentes F' e $-F'$ se neutralisarão e teremos apenas no ponto D as duas forças P' e Q', cuja resultante poderá ser mudada para o ponto C de sua direcção. O valor d'esta resultante será, portanto, a somma das componentes P e Q ou

$$R = P + Q.$$

103. Os triangulos semelhantes DCA e APS dão-nos :

$$\frac{DC}{AP} = \frac{AC}{SP};$$

d'onde

$$DC \times SP = AC \times AP. \qquad (a)$$

E os triangulos tambem semelhantes DCB e BQT dão-nos :

$$\frac{DC}{BQ} = \frac{BC}{QT};$$

d'onde

$$DC \times QT = BC \times BQ. \qquad (b)$$

Dividindo, membro a membro, as equações (a) e (b), teremos :

$$\frac{SP}{QT} = \frac{AC.\ AP}{BC.\ BQ};$$

d'onde, attendendo a que $SP = QT$ e designando simplesmente por P e Q as forças AP e BQ, virá :

$$\frac{AC.\ P}{BC.\ Q} = 1;$$

portanto,

$$AC.\ P = BC.\ Q;$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC}; \qquad (c)$$

isto é, que *o ponto de applicação C da resultante R divide AB em segmentos inversamente proporcionaes ás componentes P e Q.*

104. *Corollario.*— Da equação precedente resulta:

$$\frac{P+Q}{Q}=\frac{BC+AC}{AC}=\frac{AB}{AC},$$

ou

$$\frac{R}{Q}=\frac{AB}{AC};$$

d'onde

$$\frac{R}{AB}=\frac{Q}{AC};$$

mas, tambem da equação (c), deduz-se:

$$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC};$$

portanto, por causa da razão commum

$$\frac{Q}{AC}$$

teremos:

$$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}=\frac{R}{AB}; \qquad (d)$$

isto é, que *é sempre constante a relação entre cada força e a distancia comprehendida pelos pontos de applicação das duas outras.*

105. Sendo dadas as forças P e Q (fig. 32) applicadas em A e B, uma simples construcção geometrica dá-nos a posição do ponto de applicação da resultante.

Para provarmos, prolonguemos a menor das forças dadas d'um comprimento PA' necessario para que AA' seja igual á maior das mesmas forças.

Prolonguemos agora a força BQ d'um comprimento BB' igual á menor componente AP. A intersecção das rectas $A'B'$ e AB será o ponto C de applicação da resultante.

Com effeito, a demonstração resulta da consideração dos triangulos semelhantes $AA'C$ e $BB'C$, que nos dão :

$$\frac{AA'}{AC} = \frac{BB'}{BC},$$

ou simplesmente

$$\frac{Q}{AC} = \frac{P}{BC}.$$

106. *Caso em que as componentes são de sentidos contrarios.*— Ao caso de duas forças parallelas e dirigidas no mesmo sentido, podemos reduzir o de duas forças parallelas e oppostas.

Sejam, com effeito, (fig. 33) duas forças P e Q parallelas e oppostas, applicadas nos pontos A e B da recta invariavel AB.

Decomponhamos a força P em duas outras forças parallelas e dirigidas no mesmo sentido : uma Q', applicada em B, igual e contraria á força Q ; e outra R applicada em C, de modo que tenhamos a relação (d)

$$\frac{R}{AB} = \frac{Q'}{AC}. \qquad (e)$$

A força P tendo sido decomposta em R e Q', o systema de forças constará de Q, Q' e R. E como as duas forças Q e Q' são iguaes e directamente oppostas, se destruirão mutuamente. Portanto, a força R será a resultante das forças dadas.

O seu valor, por causa do da força P, dado pela fórmula $P = R + Q'$, será :

$$R = P - Q ;$$

isto é que *a resultante d'um systema de duas forças parallelas, desiguaes e de sentidos oppostos, é parallela a estas forças, dirigida no sentido da maior e igual á sua differença.*

107. A proporção (e) estabelecida precedentemente,

$$\frac{R}{AB} = \frac{Q'}{AC}, \text{ ou } \frac{P-Q}{AB} = \frac{Q}{AC},$$

convenientemente transformada, dá-nos:

$$\frac{P-Q+Q}{AB+AC} = \frac{Q}{AC},$$

ou, tendo em vista a figura,

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC},$$

ou ainda

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC};$$

isto é, que *o ponto de applicação da resultante acha-se sobre o prolongamento da recta de applicação das componentes, do lado da maior; suas distancias aos pontos de applicação das componentes estão entre si na razão inversa das grandezas d'estas forças.*

108. *Corollario.*—Da equação precedente

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC}$$

e da equação (e)

$$\frac{R}{AB} = \frac{Q}{AC},$$

facilmente deduz-se:

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB};$$

isto é, que *é sempre constante a relação entre cada força e a distancia comprehendida pelos pontos de applicação das duas outras.*

109. Sendo dadas as forças P e Q (fig. 34) parallelas, desiguaes e oppostas, uma simples construcção geometrica dá-nos a posição do ponto de applicação da resultante.

Faça-se $BP' = AP$ e $AQ' = BQ$. A recta $P'Q'$ encontrará o prolongamento de BA no ponto procurado. Com effeito, os triangulos semelhantes BCP' e ACQ' dão-nos:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AQ'}{BP'},$$

ou simplesmente

$$\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}.$$

110. A composição de duas forças parallelas e dirigidas em sentidos contrarios póde tambem pelos methodos de Varignon e D'Alembert ser estabelecida.

1.º *Methodo.*— Sejam AP e AQ (fig. 35) duas forças concurrentes e seja AR a sua resultante. Tracemos uma recta qualquer BC igualmente inclinada sobre as direcções das forças P e Q. Mudemos as forças P, Q e R respectivamente para os pontos B, C e D de suas direcções e designemos as mesmas forças por P', Q' e R'.

Imaginando que o ponto A afaste-se ao infinito, as duas forças P' e Q' se tornarão parallelas, perpendiculares á BC e o angulo $P'AQ = m$, supplemento de PAQ, se annullará. Portanto, a intensidade da resultante será:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\ PQ \cos (180 - m)} =$$

$$= \sqrt{P^2 + Q^2 - 2\ PQ \cos m} =$$

$$= \sqrt{P^2 + Q^2 - 2\ PQ} =$$

$$= P - Q;$$

d'onde, por ser $R = R'$, $P = P'$ e $Q = Q'$, teremos:

$$R' = P' - Q'.$$

A direcção da resultante será parallela á das duas outras forças, o seu ponto de applicação D deverá, como no caso da convergencia, satisfazer a condição seguinte:

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{CD}{BD}.$$

111. 2.º Methodo.— Sejam P e Q (fig. 36) as duas forças parallelas e oppostas, applicadas sobre os pontos A e B da recta invariavel AB.

Nos pontos A e B e na direcção da recta AB appliquemos as forças F e $-F$, iguaes e contrarias.

Compondo as forças $-F$ e Q, seja S a sua resultante. Compondo as forças F e P seja T a sua resultante. Prolonguemos SB até encontrar a direcção da força T no ponto D. N'este ponto, decomponhamos a força S em duas outras: uma $-F'$, igual, parallela e do mesmo sentido que a força $-F$ e outra Q', igual, parallela e do mesmo sentido que a força Q. N'este mesmo ponto D, decomponhamos a força T em duas outras: uma F', igual, parallela e do mesmo sentido que a força F e outra P', igual, parallela e do mesmo sentido que a força P.

E' claro que no ponto D as duas forças F' e $-F'$ se destruirão mutuamente e só teremos as forças P' e Q' dirigidas segundo a recta XY, parallelas ás forças P e Q. A primeira P' actuando de D para X, a segunda Q' actuando de D para Y.

Evidentemente a sua resultante R' applicada em D será igual á differença $P' - Q'$, por ser $P' > Q'$. Mudando a resultante R' para o ponto C em que a recta XY encontra o prolongamento de AB, teremos:

$$R = P - Q,$$

como queriamos demonstrar.

112. A composição de duas forças parallelas e dirigidas em sentidos oppostos só não poderá effectuar-se quando ellas

forem rigorosamente iguaes. Com effeito, si na fórmula precedente, fizermos $P = Q$, teremos $R = o$. O ponto de applicação d'esta resultante se achará situado a uma distancia infinita dos pontos de applicação das componentes, como facilmente deduz-se da equação

$$\frac{P}{BC} = \frac{R}{AB},$$

que necessariamente deve ter logar, sendo A, B e C os pontos em que actuam as forças P,Q e R. D'ella tiramos

$$BC = \frac{P.AB}{R}.$$

Por ser $R = o$, vem :

$$BC = \frac{P.AB}{0} = \infty.$$

Isto significa que *um systema de duas forças iguaes, parallelas e oppostas não póde ser substituido por uma unica força.*

Suppondo (fig. 37) que nos pontos A e B sejam applicadas, perpendicularmente á recta AB, duas forças P e $-P$, iguaes, parallelas e oppostas, ellas poderão produzir a rotação da recta AB em torno do ponto fixo K, meio d'esta linha. Este effeito das forças $(P, -P)$ não poderá, evidentemente, ser devido a uma unica força.

As forças $(P,-P)$, cuja resultante é nulla, podem, entretanto, ser substituidas de uma infinidade de modos diversos; mas o serão sempre por *um systema de duas forças iguaes, parallelas e oppostas*. Com effeito, nos pontos A e B appliquemos as forças iguaes e contrarias $-F$ e F. Evidentemente, ellas não perturbarão as acções P e $-P$, pois que, si fossem mudadas para um mesmo ponto de sua direcção, K por exemplo, se destruiriam mutuamente. Compondo a força P com a força F teremos a resultante R e compondo as forças $-P$ e $-F$, teremos a resultante $-R$. As duas forças R e $-R$, iguaes

e contrarias, são tambem parallelas, portanto produzirão o mesmo effeito que as forças $(P, -P)$.

Como as forças F e $-F$ são de grandeza arbitraria, é claro que as resultantes R e $-R$ serão sempre iguaes, parallelas e oppostas, quaesquer que sejam as intensidades das forças F e $-F$. Cada um dos systemas que substituir o systema primitivo $(P, -P)$, cujas forças foram suppostas perpendiculares á recta AB, será substituido por forças differentes de P e terá tambem differente de AB a perpendicular commum ás direcções das respectivas forças; mas o producto $P. AB$, de cada força pela respectiva perpendicular, será sempre constante para todos os systemas considerados.

Dá-se o nome de *conjugados* aos systemas de duas forças iguaes, parallelas e oppostas. Poinsot estudou as propriedades d'estes systemas de forças e estabeleceu regras para a sua composição e decomposição, de que trataremos com opportunidade.

113. *Caso geral.*— Baseando-nos nas regras da composição de duas forças parallelas, applicadas em pontos invariavelmente ligados, nada nos falta para considerar o caso geral da composição d'um systema qualquer de forças parallelas, agindo em pontos ligados por linhas invariaveis.

Sejam (fig. 38) as forças P', P'', P''', etc., applicadas respectivamente em A, B, D, etc.

Por qualquer das forças consideradas podemos começar a composição.

Poderiamos fazer primeiro a composição das forças que actuam n'um sentido, depois fazer a composição das forças que actuam n'outro sentido: a resultante total seria a differença das duas resultantes parciaes; e si estas fossem iguaes o systema de forças dadas se resumiria n'um *conjugado* de forças.

E tambem podemos fazer a composição successiva, quaesquer que sejam os sentidos das forças que combinemos.

Com effeito, o resultado será sempre a determinação d'uma resultante, ou d'um mesmo conjugado.

Compondo a força P' com a força P'', teremos a resultante R' applicada em C, dada pela proporção

$$\frac{P'}{P''} = \frac{B\ C}{A\ C};$$

compondo a força R' com a força P''', teremos a resultante R applicada em G, ponto cuja posição será determinada pela proporção

$$\frac{R'}{P'''} = \frac{D\ G}{D\ C}.$$

E assim por diante.

A intensidade da resultante será dada pela somma algebrica das intensidades das componentes.

Com effeito,

$$R' = P' + P'',$$

$$R = P''' - R';$$

d'onde

$$R = P''' - (P' + P'').$$

Ou, d'uma maneira symbolica,

$$R = \Sigma (P).$$

Tal é a fórmula geral da resultante. Quanto á sua direcção, ella será a mesma que a das componentes; quanto ao seu ponto de applicação, a série de construcções geometricas que seriam empregadas para obtel-o, *sempre dividindo cada recta de applicação em duas partes inversamente proporcionaes ás componentes correspondentes,* o determinaria geometricamente de posição.

Este ponto de applicação da resultante geral d'um systema de forças parallelas, applicadas em pontos dados e invariavelmente ligados, chama-se o *centro das forças parallelas.*

Em seu torno poderá sempre gyrar a resultante, quando as componentes gyrarem igualmente em torno dos respectivos pontos de applicação, não perturbando o parallelismo e o sentido relativo de suas acções.

A resultante geral passará pelo *centro das forças parallelas,* ainda mesmo que as intensidades das componentes variem proporcionalmente.

114. *Decomposição das forças.*—Para um exacto conhecimento dos differentes gráos de indeterminação do problema da decomposição d'uma força dada em muitas outras forças parallelas, applicadas a pontos cujas ligações são invariaveis, bastam simples noções sobre a composição das forças parallelas; mas, consideremos alguns problemas de decomposição, a titulo de exercicio.

Comecemos pela decomposição d'uma força dada em duas outras, applicadas em dois pontos dados.

Si a força e os dois pontos não se acharem n'um mesmo plano, o problema não deverá ser proposto.

Distinguiremos dois casos sempre possiveis:

1.º Os dois pontos acham-se situados d'um lado e d'outro da força dada.

2.º Os dois pontos acham-se situados d'um mesmo lado da força dada.

1.º caso.—Seja R (fig. 39) a força dada e sejam A e B os dois pontos de applicação das componentes procuradas. Seja C o ponto em que a resultante R encontra a recta de applicação $A B$. Pelo ponto A tiremos a recta $A D$ igual e parallela á força R. Unindo os pontos D e B, pelo ponto C tiremos $C E$ parallela á $D B$.

Os dois triangulos semelhantes $A E C$ e $A D B$ dão-nos:

$$\frac{A E}{E D} = \frac{A C}{B C};$$

portanto, as componentes serão $A E$ e $E D$. Designando-as por Q e P, teremos:

$$P = D E, \; Q = A E.$$

2º caso. — Seja R (fig. 40) a força dada e sejam A e B os dois pontos dados.

Seja C o ponto de applicação da resultante R. Pelo ponto R tiremos uma parallela RA' á recta CB até encontrar a recta BA', parallela á CR.

Unamos os pontos A e A' e pelo ponto C tiremos CC' parallela á AA'.

Os dois triangulos BAA' e BCC' dão-nos:

$$\frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC};$$

portanto, designando as componentes que devem ser applicadas em A e B, por P e Q, teremos:

$$P = B\,C', \quad Q = A'\,C'.$$

115. Si fossem dadas a resultante e uma das componentes, poderiamos achar a outra componente. Tambem distinguiremos dois casos.

1.º *A resultante é maior e do mesmo sentido que a componente dada.*

2.º *A resultante é menor e do mesmo sentido que a componente dada.*

1º caso. — Sejam (fig. 41) R e P as forças dadas.

Pelo ponto A tiremos AD igual e parallela á força R. De D para A tomemos DE igual á força P. Unamos os pontos E e C.

Pelo ponto D tiremos DB parallela á EC. Os triangulos semelhantes AEC e ADB dão-nos:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC};$$

portanto, Q designando a componente procurada, teremos:

$$Q = AE.$$

2º caso. — Sejam (fig. 42) R e P as forças dadas. Pelo ponto C tiremos CD igual e parallela á força P.

De D para C tomemos DE igual á resultante R. Unamos os pontos E e A. Pelo ponto D tiremos DB parallela á EA. Os triangulos semelhantes ACE e BCD dão-nos:

$$\frac{CD}{BC} = \frac{CE}{AC};$$

portanto, Q designando a componente procurada, teremos:

$$Q = CE.$$

116. Examinado o caso da decomposição d'uma força em duas outras forças parallelas, passemos á decomposição d'uma força dada em tres outras forças parallelas cujos pontos de applicação são dados.

1º caso:

A direcção da força passa por um ponto da área do triangulo determinado pelos tres pontos dados.

Sejam A, B, C (fig. 43) os tres pontos de applicação das componentes procuradas; seja G o ponto da applicação da resultante dada.

Tiremos $A\,G$ e prolonguemos esta recta até o ponto D.

Decomponhamos R em duas outras forças parallelas: uma P applicada em A e outra X applicada em D.

A força X, decomposta em P' e P'', respectivamente applicadas em B e C, terminará a solução do problema.

2º caso:

A direcção da força passa por um ponto exterior á área do triangulo determinado pelos tres pontos dados.

Sejam A, B, C (fig. 44) os tres pontos de applicação das componentes procuradas; seja G o ponto de applicação da resultante dada.

Tiremos $A\,G$ e determinemos assim o ponto D.

Decomponhamos R em duas outras forças: uma P applicada em A e outra X applicada em D.

Feita agora a decomposição de X em P' e P'', respectivamente applicadas em B e C, teremos resolvido o problema.

117. Si a força R applicada em G (fig. 45) tivesse de ser decomposta em quatro outras forças parallelas, applicadas respectivamente em A, B, C e D, o problema seria indeterminado.

Com effeito, unamos os pontos G e C e prolonguemos $G\,C$ até o seu encontro com um ponto qualquer I tomado no interior do triangulo $A\,B\,D$.

Decomponhamos a resultante dadá R em duas forças parallelas, uma P'' applicada em C, outra X applicada em I.

A força X, decomposta em tres outras parallelas respectivamente applicadas em A, B e D, terminará a solução do problema.

Mas, evidentemente, a posição arbitraria do ponto I deixa-nos ver claramente a infinidade de soluções que o problema admitte.

No caso geral, a decomposição d'uma força em um numero qualquer de forças parallelas, applicadas a pontos ligados por linhas invariaveis, é um problema cujo gráo de indeterminação é sufficientemente indicado pelo caso precedente.

3. THEORIA DOS MOMENTOS

118. Chama-se *momento* d'uma força em relação a um ponto ao producto da força pela perpendicular tirada do ponto á sua direcção.

O ponto dado chama-se *pólo* ou *centro* dos momentos, a perpendicular toma o nome de *braço de alavanca*.

Theorema de Varignon. — A obra posthuma do illustre geometra Varignon, a quem a sciencia muito deve, contém o seguinte principio : *o momento da resultante de duas forças convergentes em relação a um ponto tomado no plano das forças é igual á somma ou differença dos momentos das componentes.*

1.º *caso.*— Supponhamos (fig. 46) o parallelogrammo $A\,C\,D\,B$, cujos lados $A\,C$ e $A\,B$ representam duas forças e cuja diagonal $A\,D$ representa a resultante d'estas forças.

Seja K um ponto situado no plano do parallelogrammo, de posição tomada para centro dos momentos cuja relação vamos demonstrar.

Unamos o centro K aos quatro vertices do parallelogrammo e tiremos os braços de alavanca das forças $A\ C$, $A\ D$ e $A\ B$.

Sobre a base commum $A\ K$ dos triangulos $A\ C\ K$, $A\ D\ K$ e $A\ B\ K$, baixemos as respectivas alturas $C\ h$, $D\ H$ e $B\ h'$.

1.º Resultará que :

$$D\ H = B\ h + B\ h'$$

Para provarmos, tiremos BF parallelamente á base $A\ K$.

O triangulo $B\ D\ F$ será igual ao triangulo $A\ C\ h$.

Portanto,

$$D\ F = C\ h.$$

Evidentemente,

$$D\ H = D\ F + F\ H,$$

$$F\ H = B\ h';$$

portanto,

$$D\ H = C\ h + B\ h',$$

como queriamos provar.

2.º As áreas dos triangulos $A\ C\ K$, $A\ D\ K$ e $A\ B\ K$, que têm todos a mesma base $A\ K$, serão :

$$s = \frac{1}{2} A\ K.\ C\ h,$$

$$s' = \frac{1}{2} A\ K.\ B\ h',$$

$$S = \frac{1}{2} A\ K.\ D\ H;$$

d'onde, por causa da relação estabelecida entre as alturas, a relação entre as áreas será :

$$S = s + s'.$$

Designando as forças AC, AB e AD, respectivamente por P, Q e R, e os braços de alavanca Kc, Kb e Kd por p, q e r, teremos :

$$S = \frac{1}{2} R\,r,\ s = \frac{1}{2} P\,p,\ s' = \frac{1}{2} Q\,q;$$

portanto, por causa da relação das áreas,

$$\frac{1}{2} R\,r = \frac{1}{2} (P\,p + Q\,q),$$

ou

$$Rr = P\,p + Q\,q,$$

como queriamos demonstrar.

2.º *caso*.— Si o centro K (fig. 46) fosse situado no angulo das componentes BAC ou em seu verticalmente opposto, teriamos, feita a mesma construcção que no caso anterior,

$$D\,H = C\,h - B\,h';$$

portanto,

$$S = s - s';$$

d'onde

$$R\,r = P\,p - Q\,q,$$

que demonstra a nossa proposição.

119. Si o centro dos momentos é situado na propria direcção da resultante ou das forças o momento respectivo será nullo. Seja, por exemplo, tomado sobre a resultante. Portanto, $r = o$. A equação precedente dá-nos :

$$P\,p - Q\,q = o,$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p},$$

relação que já ficou estabelecida.

120. Varignon estabeleceu o theorema dos momentos por meio das áreas dos triangulos que unem o centro dos momentos ás grandezas das forças. Carnot estabeleceu o mesmo principio por meio das projecções.

Sejam (fig. 47) AB, AD e AE tres forças concurrentes em A, taes que AD seja a resultante das outras duas.

Seja C o centro dos momentos das forças e p, q, r os respectivos braços de alavanca Cp, Cq, Cr.

Projectemos as forças AB, AD e AE respectivamente sobre o eixo XX' perpendicular á AC e designemos por c a distancia AC. Teremos:

$$\cos PAX = \operatorname{sen} PAY = \frac{p}{c},$$

$$\cos RAX = \operatorname{sen} RAY = \frac{r}{c},$$

$$\cos QAX' = \operatorname{sen} QAY = \frac{q}{c},$$

d'onde, designando as forças por P, R, Q, as suas projecções serão :

$$Ab = AB \cos PAX = P\frac{p}{c},$$

$$Ad = AD \cos RAX = R\frac{r}{c},$$

$$Ae = AE \cos QAX' = Q\frac{q}{c}.$$

Por ser

$$Ab = Ad + db = Ad + Ae,$$

teremos :

$$P\frac{p}{c} = R\frac{r}{c} + Q\frac{q}{c};$$

d'onde

$$Rr = Pp - Qq.$$

121. Si o ponto C acha-se situado fóra do angulo PAQ, mas no plano das forças, a (fig. 48) dá-nos :

$$Ad = Ab + bd = Ab + Ae;$$

d'onde

$$Rr = Pp + Qq.$$

122. As equações relativas aos dois casos só differem por um signal, cuja significação mecanica vamos explicar. Para isto, imaginemos que o ponto C seja fixo, que os braços de alavanca Cp, Cq, Cr sejam linhas invariaveis e mudemos o ponto A respectivamente para os pontos p, q, r das direcções das forças. Si isto tem lugar, as forças P, Q, R não poderão produzir as translações dos seus pontos de applicação p, q, r, os quaes só poderão gyrar em torno do centro C de rotação.

O simples exame da figura 47 nos mostra que as rotações produzidas pelas forças P e R são dirigidas n'um mesmo sentido ; mas que a rotação devida á força Q é dirigida em sentido contrario. Portanto, cada rotação sendo medida por um momento, o signal do momento da força Q será opposto aos signaes dos momentos das forças P e R, conforme vimos.

E o exame da figura 48 nos mostra que as tres rotações de P, Q e R devem ter o mesmo signal, conforme achamos.

Assim, o theorema de Varignon ficará dotado de significação mecanica.

123. Este theorema, que estabelece uma relação independente dos angulos das forças, subsiste quando as forças P, Q e R são parallelas e o centro dos momentos acha-se situado no plano das forças. Com effeito (fig. 49) sejam P e Q duas forças parallelas e do mesmo sentido e R a sua resultante. Seja K o centro dos momentos, situado no plano das forças. Designemos respectivamente por p, q, r os braços de alavanca AK, BK, CK.

Isto posto, teremos :

$$R = P + Q \ , \ \frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC} \ ;$$

d'onde

$$P . AC = Q . BC \ ;$$

mas,

$$AC = r - p \ , \ BC = q - r \ ;$$

portanto,

$$P(r-p)=Q(q-r),$$

ou

$$Pr-Pp=Qq-Qr,$$

ou

$$(P+Q)r=Pp+Qq,$$

ou

$$Rr=Pp+Qq,$$

que demonstra a nossa proposição. Si o centro dos momentos fosse situado entre os pontos A e C, o momento da força P seria negativo.

124. Sejam (fig. 50) P e Q duas forças parallelas e dirigidas em sentidos contrarios. Seja R a sua resultante e K o centro dos momentos, situado no plano das forças. Designemos respectivamente por p, q, r os braços de alavanca AK, BK, CK.

Isto feito, virá :

$$R=P-Q,\ \frac{P}{Q}=\frac{BC}{AC};$$

d'onde

$$P.AC=Q.BC;$$

mas,

$$AC=p-r,\ BC=q-r;$$

portanto,

$$P.(p-r)=Q.(q-r),$$

ou

$$Pp-Pr=Qq-Qr,$$

ou

$$Pp-Qq=(P-Q)r,$$

ou

$$Rr=Pp-Qq,$$

que demonstra a proposição. Si o centro dos momentos fosse situado entre A e B, todos os momentos seriam negativos;

mas a equação correspondente seria a mesma que si todos fossem positivos.

Segundo o que fica dito, a equação

$$R\,r = P\,p \pm Q\,q,$$

satisfaz a todos os casos em que as forças e o centro dos momentos se acham situados n'um mesmo plano : *O momento da resultante de duas forças é igual á somma ou differença dos momentos d'estas forças, segundo que as componentes tendam a fazer gyrar seus braços de alavanca no mesmo sentido ou em sentidos oppostos em torno do centro dos momentos, e que a resultante tenda a fazer gyrar no sentido da componente capaz do maior momento.*

125. *Caso geral.*—Sejam P', P'', P''', P'^{v}, P^{v}, etc. differentes forças situadas n'um plano e consideremos um ponto fixo C tomado n'este plano. Supponhamos, para maior simplicidade, que as tres primeiras forças possam fazer gyrar em um mesmo sentido e todas as outras em sentido contrario, em torno do centro de rotação C, os seus pontos de applicação ligados mutuamente por linhas invariaveis.

Sejam p', p'', p''', etc. os respectivos braços de alavanca das forças dadas. Designando $R'\,r'$ o momento da resultante de P' e P'' e $R''\,r''$ o momento da resultante de R' e P''', teremos :

$$R'\,r' = P'\,p' + P''\,p'',\quad R''\,r'' = R'\,r' + P'''\,p''';$$

d'onde

$$R''\,r'' = P'\,p' + P''\,p'' + P'''\,p'''.$$

Designando $Q''\,q''$ o momento da resultante de todas as outras forças P'^{v}, P^{v}, etc., d'uma maneira analoga, teremos:

$$Q''\,q'' = P'^{v}\,p'^{v} + P^{v}\,p^{v} + P'^{v}\,p'^{v} + \text{etc.}$$

Si $R\,r$ designa o momento da resultante de todas as forças dadas, é claro que

$$R\,r = \pm\,(R''\,r'' - Q''\,q''),$$

por serem as forças R'' e Q'' resultantes parciaes de forças que tendem a produzir rotações contrarias em torno do centro C. O signal inferior terá logar quando o momento $R''r''$ fôr menor que o momento $Q''q''$. Suppondo que seja maior, teremos :

$$Rr = R''r'' - Q''q'' = P'p' + P''p'' + P'''p''' - (P^{\text{\tiny IV}}p^{\text{\tiny IV}} + \\ + P^{\text{\tiny V}}p^{\text{\tiny V}} + \text{etc.}),$$

isto é, que *o momento da resultante geral é igual á somma dos momentos das forças que tendem a fazer gyrar no mesmo sentido que ella os respectivos pontos de applicação, menos a somma dos momentos das forças que tendem a fazer gyrar em sentido contrario os respectivos pontos de applicação*. Ou, simplesmente, o momento da resultante geral é igual á somma algebrica dos momentos das componentes. Em linguagem algebrica, abreviada,

$$Rr = \Sigma(Pp),$$

o signal Σ designando uma somma de termos analogos e o producto Pp o momento d'uma força qualquer em relação a um centro dado no plano das forças.

126. Agora que sabemos avaliar o momento em relação a um ponto da resultante d'um systema qualquer de forças situadas de uma maneira qualquer em um mesmo plano, podemos determinar a resultante em *direcção, posição* e *intensidade*.

Para isto, consideremos arbitrariamente tres pontos quaesquer A, B, C, no plano das forças P', P'', P''', $P^{\text{\tiny IV}}$, etc. Avaliando os momentos d'estas forças successivamente em relação a esses tres pontos e designando r, r_1 e r_2 as respectivas perpendiculares d'esses centros á direcção da resultante incognita R, teremos as tres equações seguintes:

$$\left.\begin{aligned} Rr &= \Sigma(Pp), \\ Rr_1 &= \Sigma(Pp_1), \\ Rr_2 &= \Sigma(Pp_2). \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Examinando este systema de equações entre as quatro incognitas R, r,r_1 e r_2, vemos que, para ser o problema determinado, será preciso o estabelecimento de uma quarta equação. Ora, esta quarta equação deve necessariamente ser uma relação que traduza o modo de dependencia existente entre as distancias mutuas dos centros A, B, C e os braços de alavanca r, r_1, r_2. Com effeito, a resultante incognita devendo ser uma tangente commum ás tres circumferencias cujos centros são os referidos pólos A, B, C e cujos raios são as perpendiculares r, r_1, r_2, é claro que as distancias mutuas entre os centros e as grandezas dos raios não poderão variar arbitrariamente e haverá uma relação entre essas quantidades.

Para descobrirmos esta quarta equação, supponhamos o problema resolvido e figuremos a solução. Sejam (fig. 51) A, B, C os centros dos momentos; XY a direcção da resultante e AQ, BQ_1 e CQ_2 os braços de alavanca r, r_1 e r_2.

Tiremos as rectas CE e BD, parallelas á resultante, dirigida segundo XY. Designemos por a e b os lados oppostos aos angulos A e B e por α o angulo que o lado a faz com a direcção da resultante.

Isto posto, os triangulos CBD e ACE dão-nos:

$$CD = a \text{ sen. } \alpha \text{ , } AE = b \text{ sen. } (C - \alpha) \text{ ;}$$

mas, tambem,

$$CD = r_2 - r_1 \text{ , } AE = r - r_1 \text{ ;}$$

portanto,

$$a \text{ sen. } \alpha = r_2 - r_1 \text{ ,}$$

$$b \text{ sen. } (C - \alpha) = r - r_1 \text{ .}$$

Estas duas equações se reduzem a uma só, pela eliminação de α; mas uma tal eliminação póde ser dispensada. Basta que seja o triangulo $A\ B\ C$ rectangulo, o que podemos fazer. Suppondo $C = 90^o$, teremos $\alpha = o$; d'onde a primeira das equações precedentes dá-nos:

$$r_2 = r_1 \text{ .}$$

A segunda reduz-se simplesmente a

$$b = r - r_1 .$$

Em vista de ser $r_2 = r_1$, as duas equações

$$Rr_1 = \Sigma (Pp_1) , \; Rr_2 = \Sigma (Pp_2) ,$$

serão inteiramente identicas e, portanto, poderemos dispensar uma d'ellas, como superflua. Assim, as equações do problema serão:

$$Rr = \Sigma (Pp) , \; Rr_1 = \Sigma (Pp_1) , \; b = r - r_1 . \qquad (b)$$

Ellas determinarão facilmente a direcção, posição e intensidade da resultante d'um systema de forças situadas no plano ABC (fig. 52).

A *direcção* será a do lado a, parallelo á XY, que une os dois centros B e C.

A *posição* da resultante será facilmente deduzida das equações (b). Com effeito, as duas primeiras dão-nos:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\Sigma (Pp)}{\Sigma (Pp_1)} ;$$

d'onde

$$r_1 = \frac{r \, \Sigma (Pp_1)}{\Sigma (Pp)} .$$

Da terceira tiramos:

$$r_1 = r - b ;$$

portanto,

$$r - b = \frac{r \, \Sigma (Pp_1)}{\Sigma (Pp)} ;$$

d'onde

$$r = \frac{b \, \Sigma (Pp)}{\Sigma (Pp) - \Sigma (Pp_1)}$$

será a distancia tirada do centro dos momentos A perpendicularmente á direcção da resultante, que fixará a posição d'esta força.

Quanto á *intensidade*, a primeira das equações (b) dá-nos :

$$R = \frac{\Sigma (Pp)}{r} = \frac{\Sigma (Pp)}{\dfrac{b \, \Sigma (Pp)}{\Sigma (Pp) - \Sigma (Pp_1)}} = \frac{\Sigma (Pp) - \Sigma (Pp_1)}{b}.$$

Si as forças dadas tornam-se convergentes, a regra do parallelogrammo nos dará a intensidade e a direcção da resultante, cuja posição será facilmente definida pela primeira das equações (b). Com effeito, ella dá-nos :

$$r = \frac{\Sigma (Pp)}{R}.$$

Bastará, portanto, no caso da convergencia, que avaliemos os momentos das forças sómente em relação ao ponto A. Tal é a solução que damos ao problema formulado por Augusto Comte e até o presente ainda não resolvido.

127. *Momentos em relação a um eixo.*— Supponhamos um systema de forças convergentes e dirigidas no espaço d'uma maneira qualquer.

Si quizermos avaliar os momentos de todas estas forças em relação a um pólo dado K, procederemos d'este modo : pelo ponto K faremos passar um plano qualquer e por este mesmo ponto tiraremos um eixo ZZ' perpendicular ao plano. Decompondo cada uma das forças dadas em duas outras, uma parallela ao eixo e outra parallela ao plano, vemos que as primeiras componentes não poderão imprimir nenhuma rotação em torno do centro K. Com effeito, mudados os pontos de applicação das differentes componentes parallelas ao eixo para o plano considerado, ellas ficarão todas perpendiculares ao dito plano e jamais poderão fazer gyrar os respectivos braços de alavanca em torno do referido centro K.

Sendo, pois, nullos os momentos das componentes parallelas ao eixo, só nos restam as componentes parallelas

ao plano. Ora, estas projectando-se em verdadeira grandeza sobre o plano, são as proprias projecções das forças dadas sobre o mesmo plano. Os seus momentos, em relação ao centro K, medirão as rotações que as forças dadas poderiam produzir em torno d'este ponto.

Assim, toda a questão reduz-se a projectar as forças dadas sobre um plano que passar pelo centro K; tirar por este ponto um eixo perpendicular ao plano e avaliar os momentos das projecções em relação ao mesmo ponto K.

A estes momentos dá-se o nome de *momentos em relação a um eixo.*

Chama-se, pois, momento d'uma força em relação a um eixo qualquer *ao producto da projecção d'esta força sobre um plano perpendicular ao eixo pela mais curta distancia da projecção ao eixo.*

Em vista d'esta definição, o momento d'uma força em relação a um eixo será nullo nos dois casos seguintes: quando a força é nulla e quando a força acha-se situada em um mesmo plano com o eixo.

No primeiro caso, a demonstração é evidente e no segundo caso a força póde ser parallela ao eixo ou póde encontral-o. Sendo parallela, a sua projecção sobre o plano se reduzirá a um só ponto, d'onde o momento será nullo. Sendo convergente, o braço de alavanca será nullo.

Resulta do que fica dito que as relações entre momentos em relação a um eixo dado são necessariamente as mesmas que as que existem entre momentos em relação a um ponto. Estes momentos chamam-se *momentos do primeiro genero.*

128. As forças convergentes deram logar aos momentos do primeiro genero e as forças parallelas fizeram surgir um *segundo genero* de momentos. São os *momentos em relação a um plano.*

Chama-se momento de uma força em relação a um plano ao producto da força pela perpendicular tirada de seu ponto de applicação ao plano. Si, por exemplo, P é a intensidade de uma força applicada ao ponto cujas coordenadas rectangulares são (x, y, z), os productos (Px, Py, Pz) serão

respectivamente os momentos d'esta força P em relação aos planos dos yz, dos xz e dos xy.

Os momentos do segundo genero dependem, pois, da posição do ponto de applicação de cada força e são independentes de sua direcção; e os momentos do primeiro genero são, ao contrario, independentes das posições dos pontos de applicação das forças, mas dependentes de suas direcções.

Os momentos do segundo genero surgem da consideração d'um systema de forças parallelas não situadas no mesmo plano, cujos momentos do primeiro genero não podem ser tomados.

Elles podem ser positivos ou negativos, conforme os signaes das forças e das coordenadas dos seus pontos de applicação.

129. *Momentos de segundo genero.— 1º caso.* Sejam (fig. 53) P e Q duas forças parallelas e R a sua resultante. Dos pontos A, B, C de applicação abaixemos sobre o plano XY as perpendiculares $Aa=p$, $Bb=q$, $Cc=r$. Pelo ponto C tiremos a parallela MN ao plano considerado. Os triangulos semelhantes ANC e BMC dão-nos:

$$\frac{BM}{AN}=\frac{BC}{AC},$$

ou

$$\frac{Bb-Cc}{Cc-Aa}=\frac{BC}{AC};$$

mas,

$$\frac{P}{Q}=\frac{BC}{AC};$$

portanto,

$$\frac{P}{Q}=\frac{Bb-Cc}{Cc-Aa}=\frac{q-r}{r-p};$$

d'onde

$$P(r-p)=Q(q-r),$$

ou

$$Pr-Pp=Qq-Qr,$$

ou

$$(P+Q)r=Pp+Qq;$$

mas,

$$R = P + Q;$$

portanto,

$$Rr = Pp + Qq;$$

isto é, que *o momento da resultante de duas forças parallelas e dirigidas no mesmo sentido, em relação a um plano dado, é igual á somma dos momentos das componentes em relação ao mesmo plano.*

130. 2º *caso.*— Si as componentes parallelas P e Q (fig. 54) são dirigidas em sentidos contrarios, teremos :

$$\frac{BM}{AN} = \frac{BC}{AC},$$

ou

$$\frac{Cc - Bb}{Cc - Aa} = \frac{BC}{AC};$$

mas,

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC};$$

portanto,

$$\frac{P}{Q} = \frac{Cc - Bb}{Cc - Aa} = \frac{r - q}{r - p};$$

d'onde

$$P(r - p) = Q(r - q),$$

ou

$$Pr - Pp = Qr - Qq;$$

ou

$$(P - Q)r = Pp - Qq,$$

mas,

$$R = P - Q;$$

portanto,

$$Rr = Pp - Qq;$$

isto é, que *o momento da resultante de duas forças parallelas e dirigidas em sentidos contrarios, em relação a um plano dado, é igual á differença dos momentos das componentes em relação ao mesmo plano.*

3º *caso*.— As forças sendo parallelas e do mesmo sentido, o momento da resultante é dado pela relação já demonstrada

$$Rr = Pp + Qq\ ;$$

mas, as forças foram suppostas situadas d'uma mesma parte do plano. Si, por exemplo, a força Q, do mesmo sentido que P, é applicada a um ponto cuja distancia ao plano é dirigida em sentido contrario ao das distancias dos pontos de applicação das forças P e R, o momento d'essa força Q deverá ser negativo. D'onde a equação será :

$$Rr = Pp - Qq.$$

131. *Caso geral*.— Sejam P', P'', P''', P^{v} etc., differentes forças parallelas, applicadas a pontos invariavelmente ligados e dirigidas d'uma maneira qualquer no espaço. Seja R a resultante d'estas forças e designemos por p', p'', p''', etc. as respectivas distancias dos pontos de applicação das componentes a um dado plano. Chamemos r a distancia do centro das forças parallelas, ou ponto de applicação da resultante, ao mesmo plano.

Empregando a regra estabelecida para o caso de duas forças parallelas, consideraremos primeiramente as forças P' e P'' ; conhecido o momento de sua resultante o sommaremos algebricamente com o momento da força P''' ; assim por diante. D'onde teremos :

$$R'r' = P'p' + P''p'',$$
$$R''r'' = R'r' + P'''p''',$$
$$R'''r''' = R''r'' + P'^{\text{v}}p'^{\text{v}},$$

etc., etc. Sommando estas equações membro a membro e supprimindo os termos communs, teremos :

$$R'''r''' = P'p' + P''p'' + P'''p''' + P'^{\text{v}}p'^{\text{v}}\ ;$$

ou, d'uma maneira geral,

$$Rr = P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.}\ ;$$

isto é, que *o momento da resultante d'um systema de forças parallelas, applicadas a pontos cujas ligações são*

invariaveis, e dirigidas d'um modo qualquer no espaço, em relação a um plano, é igual á somma algebrica dos momentos das componentes em relação ao mesmo plano. Ou, symbolicamente,

$$Rr = \Sigma\,(Pp).$$

132. *Coordenadas do centro das forças parallelas.*— Supponhamos um systema de eixos rectangulares fixos Ox, Oy, Oz. Sejam P', P'', P''', *etc.* muitas forças parallelas applicadas em differentes pontos invariavelmente ligados. Designemos por (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), etc. as coordenadas respectivas d'estes pontos. Seja R a resultante geral do systema de forças e (x_1, y_1, z_1) as coordenadas do centro das forças consideradas.

Tomando os momentos d'estas forças em relação aos tres planos coordenados, teremos as equações seguintes :

$$Rx_1 = P'x' + P''x'' + P'''x''' + \text{etc.} = \Sigma\,(Px),$$
$$Ry_1 = P'y' + P''y'' + P'''y''' + \text{etc.} = \Sigma\,(Py),$$
$$Rz_1 = P'z' + P''z'' + P'''z''' + \text{etc.} = \Sigma\,(Pz)\,;$$

as quaes, reunidas á equação

$$R = P' + P'' + P''' = \text{etc.}\ \Sigma\,(P),$$

determinam completamente a posição no espaço, do centro das forças parallelas. Com effeito, teremos:

$$x_1 = \frac{\Sigma\,(Px)}{\Sigma(P)},\ y_1 = \frac{\Sigma\,(Py)}{\Sigma(P)},\ z_1 = \frac{\Sigma\,(Pz)}{\Sigma(P)}.$$

Taes são as coordenadas rectangulares do centro das forças parallelas.

4. THEORIA DOS CONJUGADOS

133. Dá-se o nome de *conjugado,* como dissemos, a um systema de duas forças parallelas, iguaes e inversamente

dirigidas $(P, -P)$ (fig. 55), applicadas em dois pontos A e B invariavelmente ligados. Chama-se *braço de alavanca do conjugado* á mais curta distancia CD das direcções das forças do mesmo conjugado.

O producto $P\ C\ D$ da intensidade de uma das forças pelo braço de alavanca do conjugado é a expressão do *momento do conjugado*. O momento será positivo ou negativo conforme o sentido da rotação que o conjugado possa produzir em torno do ponto K, meio do braço de alavanca $C\ D$, supposto fixo.

O momento d'um conjugado é um momento do primeiro genero. Com effeito, avaliemos os momentos das forças $(P, -P)$ em relação ao ponto K tomado no plano das forças. Consideremos primeiro (fig. 56) o ponto K situado no prolongamento da recta $C\ D$. O momento da força P em relação ao ponto K será $P.\ C\ K$; o momento da força $-P$ em relação ao mesmo ponto será $P.\ D\ K$; e como estes dois momentos devem ser de signaes contrarios porque elles exprimem rotações contrarias em torno de K, supposto fixo, a somma algebrica dos dois momentos será:

$$P.\ CK - P.\ DK = P\ (CK - DK) = P.\ CD.$$

Consideremos agora o ponto K situado como está na figura 55. Os momentos serão do mesmo signal e teremos:

$$P.\ CK + P.\ DK = P\ (CK + DK) = P.\ CD.$$

Assim, o momento d'um conjugado é um momento do primeiro genero.

Os pontos de applicação das forças A e B (fig. 55) podendo ser mudados para os pontos C e D de suas direcções, as forças P e $-P$ poderão ser suppostas sempre actuando sobre os extremos do braço de alavanca do conjugado.

134. *Propriedades dos conjugados.*— Para que possamos estudar a composição dos conjugados, estabeleçamos as propriedades fundamentaes seguintes:

1.ª *Propriedade. Póde-se, sem modificar o effeito de um conjugado, transportal-o parallelamente a si mesmo ou fazel-o gyrar de um angulo qualquer em seu plano, si o novo braço de alavanca é invariavelmente ligado ao primeiro.*

Consideremos, em primeiro logar (fig. 57), o conjugado $(P, -P)$ applicado sobre a recta invariavel $A\ B$. No plano d'este conjugado, ou em plano que lhe seja parallelo, tomemos a recta invariavel $A'\ B'$, igual e parallela á $A\ B$.

As rectas invariaveis $A\ B'$ e $A'\ B$ estarão evidentemente em um mesmo plano e se dividirão ao meio no ponto I. Appliquemos sobre $A'\ B'$, parallelamente ao conjugado dado $(P, -P)$, dois outros conjugados $(P', -P')$, $(P'', -P'')$ que lhe sejam perfeitamente iguaes. E' claro que estes dois conjugados se destruirão mutuamente e não modificarão o effeito do conjugado $(P, -P)$.

Isto posto, façamos a composição das forças parallelas P e P'', applicadas em A e B' e teremos a resultante $2\ P$ applicada ao meio I da diagonal $A\ B'$, dirigida no mesmo sentido das componentes. Façamos analogamente a composição das forças $-P''$ e $-P$, applicadas em A' e B e teremos a resultante $-2\ P$ applicada ao meio I da diagonal $A'\ B$, dirigida em sentido contrario ao da resultante $2\ P$. Evidentemente, as duas resultantes iguaes e directamente oppostas se neutralisarão.

Assim, apenas resultará o conjugado $(P', -P')$, applicado em $A'\ B'$, o que demonstra que um conjugado $(P, -P)$ póde ser transportado parallelamente a si mesmo em seu plano ou para um plano parallelo ao de suas forças.

Consideremos, em segundo logar (fig. 58), o conjugado $(P, -P)$ applicado sobre o braço de alavanca $A\ B$. Que o ponto I seja o meio das rectas invariaveis $A\ B$ e $C\ D$, iguaes entre si. Sobre CD appliquemos dois outros conjugados

$(P', - P')$ $(P'', - P'')$ rigorosamente iguaes ao conjugado $(P, - P)$. E' evidente que esses dois conjugados se destruirão mutuamente e não modificarão o effeito do conjugado dado.

Isto posto, façamos a composição das forças P e $- P''$ convergentes em G e teremos a resultante R applicada a este ponto. Façamos analogamente a composição das forças P'' e $- P$ convergentes em H e teremos a resultante $- R$ applicada a este ponto. Os pontos G, H e I estão, evidentemente, em linha recta. Portanto, mudemos as forças R e $- R$ para o ponto I. Estas forças sendo rigorosamente iguaes e directamente oppostas se neutralisam e só teremos o conjugado $(P', - P')$ applicado sobre $C\,D$, o que demonstra que um conjugado $(P, - P)$ póde gyrar de um angulo qualquer $A\,I\,C$ em torno do ponto I, meio do braço de alavanca $A\,B$ do conjugado.

135. 2.ª *Propriedade.— Póde-se, sem modificar o effeito de um conjugado, transformal-o em um outro conjugado do mesmo sentido e de igual momento.*

Seja o conjugado $(P, - P)$ (fig. 59) applicado sobre o braço de alavanca $A\,B$. Prolonguemos $A\,B$ de uma quantidade $B\,C$. Sobre $B\,C$, como braço de alavanca, appliquemos dois outros conjugados $(Q, - Q)$, $(Q', - Q')$ iguaes entre si e contrarios, os quaes, evidentemente, não prejudicarão o effeito do conjugado $(P, - P)$.

As forças $- P$ e $- Q'$, applicadas em B, poderão ser compostas e darão uma resultante $- (P + Q')$, igual e contraria á resultante das forças parallelas P e Q' applicadas respectivamente em A e C, si tiver logar a proporção necessaria

$$\frac{P}{Q'} = \frac{BC}{AB}.$$

Admittindo, pois, que a recta $B\,C$ seja tal que esta relação seja satisfeita, a acção da resultante $- (P + Q')$ destruirá a acção da resultante igual e contraria $(P + Q')$, d'onde só

teremos o conjugado $(Q, -Q)$ applicado sobre $B C$ e do mesmo sentido que o conjugado $(P, -P)$. Ora, a relação precedente é a mesma que a seguinte:

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AB};$$

d'onde

$$P . A B = Q . B C;$$

isto é, que a acção do conjugado dado póde ser substituida pela de um outro conjugado de igual momento e do mesmo sentido.

136. *Composição dos conjugados.*— Para estudarmos a composição dos conjugados, distinguiremos dois casos essenciaes : no primeiro, os conjugados acham-se situados em planos parallelos ; e no segundo, acham-se em planos convergentes. Em cada um d'estes dois casos, consideraremos primeiramente a composição fundamental de dois unicos conjugados e depois passaremos ao caso geral da composição de um numero qualquer de conjugados.

137. *1.º caso.— Dois conjugados situados de qualquer modo em planos parallelos compõem-se sempre em um só, cujo momento é igual á somma ou differença dos momentos dos conjugados componentes.*

Com effeito, sejam os conjugados $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ respectivamente applicados sobre os braços de alavanca $A B$ e $C D$. Em virtude da primeira propriedade, podemos transportar os dois conjugados dados para um mesmo plano e tornar as respectivas forças parallelas. Em virtude da segunda propriedade, podemos transformar os conjugados dados em dois outros, respectivamente equivalentes a cada um e cujo braço de alavanca EF seja o mesmo. Applicando, finalmente, um sobre o outro, resultará um conjugado unico $(R, -R)$, cujo braço de alavanca será $E F$.

Para avaliar o momento do conjugado resultante, teremos:

$$P.\ AB = P'.\ EF,$$

$$Q.\ CD = Q'.\ EF;$$

d'onde

$$P.\ AB \pm Q.\ CD = (P' \pm Q').\ EF,$$

ou, por ser

$$R = P' \pm Q',$$

teremos :

$$R.\ EF = P.\ AB \pm Q.\ CD,$$

que demonstra a regra enunciada.

138. Tendo uniformemente em vista a regra precedente, poderemos compôr em um conjugado unico um systema de qualquer numero de conjugados situados em planos parallelos : *o conjugado resultante terá o seu momento igual á somma algebrica dos momentos dos conjugados componentes*. A composição de conjugados situados em planos parallelos faz-se, pois, de um modo analogo á composição de forças parallelas.

139. *2.º caso.— Dois conjugados situados em planos convergentes compõem-se sempre em um só; si representarmos os momentos d'estes conjugados pelos comprimentos respectivos de duas rectas cuja convergencia seja a mesma que a dos dois planos, o momento do conjugado resultante será representado pela diagonal do parallelogrammo construido sobre essas mesmas rectas; e o plano d'este conjugado dividirá o angulo diedro formado pelos planos dos conjugados componentes, como a diagonal do parallelogrammo divide o angulo dos dois lados adjacentes.*

Supponhamos (fig. 60) que os conjugados sejam $(P, -P)$ e $(Q, -Q)$, respectivamente applicados sobre o mesmo braço de alavanca AB. As forças P e Q, convergentes em A, darão uma resultante dirigida segundo a diagonal do

parallelogrammo AR; do mesmo modo as forças $-P$ e $-Q$, convergentes em B, se comporão n'uma resultante dirigida segundo a diagonal do parallelogrammo sobre ellas construido.

Portanto, sobre o mesmo braço de alavanca AB resultará o conjugado $(R, -R)$, cuja acção substituirá as acções dos conjugados componentes.

Ora, como os dois conjugados dados e o conjugado resultante têm todos o mesmo braço de alavanca, os respectivos momentos estarão entre si na mesma razão que as forças P, Q, R.

Assim, si P e Q designam os momentos dos dois conjugados componentes, a força R designará o momento do conjugado resultante.

E como os angulos rectilineos, formados pelas forças AP, AQ, AR, medem, respectivamente, os angulos diedros formados pelos planos dos tres conjugados, o plano do conjugado resultante dividirá o angulo dos planos dos conjugados componentes, como a diagonal AR divide o angulo das componentes AP e AQ.

140. Tendo uniformemente em vista a regra precedente, facilmente se comprehenderá que é sempre possivel compôr em um unico conjugado um systema de muitos outros conjugados situados em planos convergentes: *a acção do conjugado resultante substituirá as acções combinadas de todos os conjugados componentes, como uma força resultante substitue as acções combinadas de todas as suas componentes.*

A composição de conjugados situados em planos convergentes faz-se, pois, d'um modo analogo á composição de forças convergentes.

141. *Eixo do conjugado.*—A composição dos conjugados póde fazer-se d'uma maneira mais simples, por meio da representação geometrica dos conjugados concebida pelo illustre Poinsot.

Pelo ponto O (fig. 61) do braço da alavanca AB do conjugado $(P, -P)$ levantemos uma perpendicular OZ ao seu

plano e sobre esta recta tomemos um comprimento $O\ L$ proporcional ao momento $P.\ A\ B$ do mesmo conjugado. O sentido da recta $O\ L$, d'uma parte ou d'outra do plano, será o sentido da rotação que o conjugado possa produzir em torno do ponto O, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda.

A grandeza linear $O L$ chama-se *o eixo do conjugado:* ella define completamente o conjugado $(P, -P)$ em direcção, intensidade e sentido.

Com effeito, seja dado o eixo $O\ L$ d'um conjugado, dirigido no sentido de O para Z. A direcção do plano do conjugado correspondente ou equivalente será a de um plano XY tirado pelo ponto O, origem do eixo, perpendicularmente ao mesmo eixo.

N'este plano, tomemos uma recta $A\ B$ de grandeza tal, que o producto de uma força P multiplicada por esta recta seja numericamente igual ao numero que dá a medida do eixo $O\ L$, avaliado segundo uma escala conveniente.

E as forças $(P, -P)$, iguaes, parallelas e perpendiculares á $A\ B$, devem ser dirigidas em sentidos contrarios taes que a tendencia da rotação figurada pelo conjugado tenha logar da esquerda para a direita, para um observador que seja supposto collocado sobre o eixo do conjugado, tendo os pés sobre o plano e a cabeça em L.

142. Adoptada a concepção de Poinsot, vemos facilmente que um systema qualquer de conjugados situados n'um mesmo plano ou em planos parallelos se reduzirá a um unico conjugado, cujo eixo será necessariamente igual á somma algebrica dos eixos dos conjugados componentes.

Si os conjugados acham-se situados em planos convergentes, poderemos transportar successivamente cada um dos eixos parallelamente a si mesmo para um mesmo ponto do espaço. Compondo os differentes eixos, tornados assim convergentes, construiremos o *polygono dos eixos* analogo ao polygono das forças e a recta que fechar esse polygono será *o eixo do conjugado resultante*.

143. *Reducção d'um systema qualquer de forças applicadas em differentes pontos d'um solido invariavel.*—

A composição dos conjugados permitte a reducção d'um systema qualquer de forças applicadas em diversos pontos A, B, C, etc. (fig. 62) d'um solido invariavel qualquer, em torno d'um ponto O invariavelmente ligado a esses differentes pontos. Com effeito, sejam P, $P,'$ $P,''$ etc. as forças dadas e seja O o ponto arbitrariamente tomado. Liguemos por linhas invariaveis os pontos A, B, C, etc. ao ponto O. N'este ponto appliquemos, parallelamente a cada força e em sentidos oppostos, duas forças iguaes a cada uma : é claro que em nada prejudicaremos o systema de forças considerado. Assim, resultará que, em logar da força P applicada em A, teremos à força P_1 applicada em O e o conjugado $(P, — P_1)$ applicado sobre a recta A O, que tem para braço de alavanca a perpendicular Oa tirada do ponto O á força P. Em logar da força P' applicada em B, teremos uma força P_1' applicada em O e um conjugado $(P'_1, — P'_1)$ applicado sobre a recta BO. E assim para as outras forças P'', P''', etc.

Ora, as forças P_1, P'_1, P'', etc. serão compostas em uma unica resultante R applicada em O e os conjugados convergentes $(P, — P_1)$, $(P,' — P'_1)$, $(P'', — P_1'')$, etc. serão compostos um só conjugado resultante $(S, — S)$.

Logo, um systema qualquer de forças, applicadas em um solido invariavel, poderá ser reduzido a uma força unica e a um conjugado unico.

Esta reducção poderá fazer-se d'uma infinidade de modos differentes, devido á escolha arbitraria da posição do ponto O. Em uma posição O' d'este ponto, que não se ache na direcção da resultante O R, poderemos ter uma resultante $O'R'$ igual, parallela e do mesmo sentido que OR; mas o conjugado resultante $(S', — S')$ não será igual ao conjugado $(S, — S)$ e se achará situado em um plano que não é parallelo ao plano d'este conjugado.

Entre essa infinidade de reducções a uma força unica e a um conjugado unico, relativas ás diversas posições no espaço que podemos arbitrar ao ponto O, uma existe para a qual *o plano do conjugado é perpendicular á direcção da resultante*. Para demonstrar, supponhamos que o conjugado obtido

$(S, -S)$ seja decomposto em dois outros: um $(T, -T)$ situado em um plano perpendicular á OR, outro $(V, -V)$ situado em um plano que passa por $O\ R$. N'este plano tomemos um ponto O_1, ao qual appliquemos, em sentidos oppostos, duas forças iguaes e parallelas á OR: teremos em O_1 uma força igual, parallela e do mesmo sentido que $O\ R$ e um conjugado $(R, -R)$. E como a posição do ponto O_1 é arbitraria, seja elle situado a uma distancia de $O\ R$ tal que o conjugado $(R, -R)$ fique igual e opposto ao conjugado $(V, -V)$ e o destrua. Portanto, só restará a força R applicada em O e o conjugado $(T, -T)$ situado em um plano perpendicular á direcção d'esta força.

Esta reducção do systema de forças a uma força e a um conjugado perpendicular á sua direcção é rigorosamente unica: *não ha no espaço outro ponto para o qual o conjugado resultante seja perpendicular á resultante.* Com effeito, si transportassemos a força R para fóra de sua posição $O_1\ R$, teriamos a considerar um conjugado $(R, -R)$ perpendicular ao conjugado $(T, -T)$; e a composição d'estes dois conjugados daria necessariamente um novo conjugado cujo plano não seria perpendicular á R. Este novo conjugado seria maior que o conjugado $(T, -T)$, pois os dois conjugados componentes eram rectangulares. Portanto, não só o ponto O_1 é o unico ponto do espaço que nos dá um conjugado cujo plano é perpendicular á resultante, como tambem é o que nos fornece o conjugado resultante *minimo*.

E, finalmente, si o ponto O tomar diversas posições no espaço em torno da direcção de $O_1\ R$ e a distancias iguaes d'esta recta, os conjugados resultantes terão valores iguaes e se acharão situados em planos differentes, igualmente inclinados sobre $O_1\ R$, d'onde resulta para esta recta o nome de *eixo central* dos conjugados do systema.

144. *Corollario.*— A reducção das forças applicadas a um solido invariavel póde nos conduzir *a duas forças, das quaes uma passará por um ponto O arbitrariamente escolhido.* Para demonstrar, supponhamos que o systema de forças applicadas ao solido tenha sido resumido em uma força R

applicada em O e em um conjugado $(S,-S)$. Si transportarmos o conjugado de maneira que uma de suas forças, a força $-S$ por exemplo, passe pelo ponto O, é claro que está força poderá ser composta com a força R. Então, teremos applicada em O uma força R', que, em geral, não estará em um mesmo plano com a força S. E, portanto, as resultantes serão duas, das quaes uma passará por um ponto dado.

145. A concepção do eixo do conjugado permittiu que Poinsot assimilasse ás simples forças os conjugados. Esta analogia, destinando-se a ligar os dois elementos dynamicos, translação e rotação, surgindo n'uma época em que haviam já sido estabelecidas todas as noções sobre os movimentos elementares, *apenas simplificou as explicações principaes, sem desenvolver um dominio essencialmente esgotado.*

CAPITULO II

APPLICAÇÃO DAS LEIS DA COMPOSIÇÃO DAS FORÇAS

I. THEORIA DOS CENTROS DE GRAVIDADE

146. No ponto de vista dynamico, *a gravidade*, a mais vulgar das forças da natureza, é a força sob cujos impulsos todos os corpos cahem para a superficie do nosso planeta, quando livremente abandonados no espaço. O esforço que exercemos sobre os corpos para mantel-os em uma situação de equilibrio nos mostra que os effeitos geraes da gravidade podem ser considerados tambem sob o ponto de vista estatico. Si, por exemplo, suspendemos um corpo solido por um fio, sentimos que elle exercerá uma tracção devida á acção da gravidade, a qual será destruida pelo esforço que fizermos para conserval-o em equilibrio. A direcção da gravidade é evidentemente a do fio quando o corpo está na situação de equilibrio : é esta direcção que se chama *a vertical*. Em um ponto qualquer do globo, a vertical é normal á superficie dos liquidos em repouso.

Em uma primeira approximação, si considerarmos a superficie da terra como sensivelmente espherica, as direcções de todas as verticaes irão passar pelo centro d'este globo. N'este caso, duas verticaes traçadas pelos pontos A e B (fig. 63), cuja distancia $A\ B$ seja desprezivel em relação ao raio da terra OA, que é proximamente de 6366 kilometros, poderão ser consideradas como parallelas. Mas, si traçarmos duas verticaes pelos pontos A e C sufficientemente afastados, vemos que ellas fazem entre si um angulo que será tanto maior quanto maior fôr a distancia $A\ C$ dos dois logares.

Todas as moleculas d'um corpo solido sendo solicitadas por forças da gravidade e todas estas forças podendo ser consideradas como parallelas e do mesmo sentido, darão uma resultante parallela á sua direcção commum e igual á sua somma. Esta resultante é o que chama-se *o peso* do corpo. D'aqui a definição : *o peso d'um corpo é a resultante das acções da gravidade sobre todos os pontos d'este corpo.*

O centro d'estas forças parallelas, ponto pelo qual passa constantemente o peso do corpo, chama-se, desde Archimedes, *o centro de gravidade* do corpo. D'aqui a definição : *o centro de gravidade d'um corpo é o centro das forças parallelas devidas ás acções da gravidade sobre este corpo.*

Diz-se que um corpo é *homogeneo* quando apresenta em todas as suas partes um mesmo peso sob um mesmo volume. Quando os corpos são homogeneos e terminados por superficies geometricamente definidas, a determinação dos centros de gravidade reduz-se a problemas de geometria. Na determinação dos centros de gravidade dos corpos heterogeneos, deve-se considerar a lei segundo a qual a densidade varia de uma molecula á outra.

A observação e a experiencia dando-nos a direcção e a intensidade do peso dos corpos, ficará mais limitado o dominio da theoria estatica da gravidade, pois teremos sómente que determinar os centros de gravidade das differentes fórmas geometricas.

147. Si p', p'', p''', etc. designam os pesos dos differentes pontos d'um solido e P o seu peso total, teremos :

$$P = p' + p'' + p''' + \text{etc.}$$

Designemos por

$$(x'\ y'\ z'),\ (x''\ y''\ z''),\ (x'''\ y'''\ z'''),\ \text{etc.}$$

as coordenadas rectangulares d'esses differentes pontos materiaes e por $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ as coordenadas do centro de

gravidade do mesmo solido, em relação aos mesmos eixos. As expressões d'estas coordenadas serão :

$$x_1 = \frac{p' x' + p'' x'' + p''' x''' + etc.}{P}, \quad y_1 = \frac{p' y' + p'' y'' + p''' y''' + etc.}{P}$$

$$z_1 = \frac{p' z' + p'' z'' + p''' z''' + etc}{P};$$

ou, symbolicamente,

$$x_1 = \frac{\Sigma\,(px)}{P}, \; y_1 = \frac{\Sigma\,(py)}{P}, \; z_1 = \frac{\Sigma\,(pz)}{P}, \qquad (a)$$

fórmulas que vão mostrar-nos que a posição do centro de gravidade d'um corpo homogeneo qualquer não depende da gravidade e depende apenas da fórma do corpo. Com effeito, si n é o numero de pontos materiaes do corpo considerado e si estes pontos têm pesos iguaes, teremos :

$$x_1 = \frac{p\,\Sigma\,(x)}{np} = \frac{\Sigma\,(x)}{n}, \; y_1 = \frac{p\,\Sigma\,(y)}{np} = \frac{\Sigma\,(y)}{n}, \; z_1 = \frac{p\,\Sigma\,(z)}{np} = \frac{\Sigma(z)}{n};$$

isto é, que *as distancias do centro de gravidade de um solido homogeneo invariavel a tres planos coordenados são médias arithmeticas das distancias de todos os pontos do solido aos mesmos planos.*

Essas fórmulas determinariam, pois, o centro de gravidade de uma fórma homogenea e invariavel qualquer, si o systema de pontos materiaes que a constitue fosse finito; mas os dois termos de cada uma d'essas fórmulas se compõem d'uma infinidade de termos e é impossivel applical-as rigorosamente, como se acham.

148. Todas as fórmas invariaveis podem dividir-se em dois grupos : *fórmas descontinuas* e *fórmas continuas*. Das primeiras, quer sejam polygonaes ou polyedricas, facilmente os *principios de symetria* nos permittirão a determinação dos seus centros de gravidade. Das segundas, as fórmulas *(a)* convenientemente transformadas em outras cujos termos sejam integraes definidas, poderemos, pelas

regras do calculo integral, determinar exactamente ou por approximação os seus centros de gravidade.

149. *Principios de symetria*.— 1.º *Toda figura homogenea que tem um plano de symetria terá o seu centro de gravidade situado n'este plano.*

Com effeito, consideremos dois pontos do corpo sobre um mesmo plano perpendicular ao plano de symetria, equidistantes e situados d'um lado e d'outro d'este plano. A resultante dos pesos d'estes dois pontos será uma força igual á sua somma e applicada ao meio da recta que une os seus pontos de applicação, ponto este que se achará situado no plano de symetria. E como cada systema analogo de dois pontos do corpo nos offerece o mesmo resultado, o centro de gravidade total se achará necessariamente situado no plano de symetria.

2.º *Toda figura homogenea que tem um eixo de symetria terá o seu centro de gravidade situado n'este eixo.* Com effeito, um eixo de symetria sendo a intersecção de dois planos de symetria e o centro de gravidade devendo estar em cada um d'estes dois planos, é claro que se achará em sua intersecção.

3.º *Toda figura homogenea que tem um centro de symetria terá o seu centro de gravidade situado n'esse ponto.* Com effeito, um centro de symetria sendo a intersecção de dois eixos de symetria e o centro de gravidade devendo estar em cada um d'estes dois eixos, é claro que se achará em sua intersecção.

Corollarios.—O centro de gravidade de uma linha recta, homogeneamente pesada, é o ponto que a divide ao meio; o centro de gravidade da área homogenea de um quadrado, de um rectangulo ou de um parallelogrammo acha-se no ponto de intersecção das diagonaes e no meio de cada uma d'ellas; e o centro de gravidade do volume de um parallelipipedo homogeneo está situado no ponto de encontro das tres diagonaes.

150. *Centro de gravidade do contorno de um polygono rectilineo e homogeneo qualquer*.— Determinado o centro

de gravidade de cada lado do polygono ou os meios dos seus differentes lados, teremos um systema de forças parallelas, applicadas respectivamente a estes pontos e proporcionaes aos comprimentos dos mesmos lados; muito facil será então a determinação do centro geral das forças parallelas ou centro de gravidade do contorno considerado, por meio das fórmulas (a). Si o contorno fôr plano, duas quaesquer d'estas fórmulas bastarão para determinar o centro de gravidade.

151. Consideremos o caso do triangulo. Para acharmos o centro de gravidade do perimetro de um triangulo rectilineo e homogeneo, seja o triangulo ABC (fig. 64). Si a, b e c são os meios dos lados BC, AC e AB, n'elles se acharão respectivamente applicadas tres forças parallelas e do mesmo sentido, iguaes aos pesos d'esses lados e proporcionaes aos seus comprimentos. Compostas as forças applicadas em a e c teremos uma resultante applicada em um ponto g de ac tal que:

$$\frac{ag}{cg} = \frac{AB}{BC}.$$

O ponto g pertencerá á bissectriz do angulo abc. Com effeito, $ab = \frac{AB}{2}$ e $bc = \frac{BC}{2}$; portanto,

$$\frac{ab}{bc} = \frac{AB}{BC}.$$

Logo,

$$\frac{ag}{cg} = \frac{ab}{bc}.$$

A intensidade da resultante applicada em g é representada pela somma $AB + BC$.

Compondo esta força com a força applicada em b, teremos a resultante final, cujo valor será representado pela somma

$$AB + BC + AC.$$

O seu ponto de applicação G está sobre a recta bg em uma situação tal que:

$$\frac{gG}{bg} = \frac{AC}{AB + BC}.$$

O ponto g' pertence á bissectriz do angulo acb. Com effeito,

$$ac = \frac{AC}{2}, \quad bc = \frac{BC}{2};$$

d'onde

$$\frac{ac}{bc} = \frac{AC}{BC};$$

e como as forças applicadas em a e b dão:

$$\frac{ag'}{bg'} = \frac{AC}{BC},$$

teremos:

$$\frac{ag'}{bg'} = \frac{ac}{bc}.$$

O ponto G pertencendo á intersecção das bissectrizes bg e cg', será equidistante dos lados do triangulo abc. Portanto, *o centro de gravidade do perimetro de um triangulo rectilineo e homogeneo é o centro do circulo inscripto ao triangulo formado pela ligação dos meios dos lados do triangulo dado.*

152. *Centro de gravidade da área de um triangulo rectilineo e homogeneo qualquer.*— Seja ABC (fig. 65) o triangulo dado.

Evidentemente, podemos considerar a área d'este triangulo como dividida em uma infinidade de rectas parallelas ao lado BC; e como o centro de gravidade de cada uma d'estas rectas acha-se no respectivo meio, a mediana AD conterá o centro de gravidade da área ABC.

Analogamente considerando esta área como dividida em uma serie de rectas parallelas ao lado AC, a mediana BE conterá o seu centro de gravidade. Ora, este ponto devendo achar-se simultaneamente situado nas medianas AD e BE, só poderá ser a intersecção d'estas duas rectas.

Seja, pois, G o centro de gravidade. Tirando a recta DE, teremos :

$$\frac{DG}{AG} = \frac{DE}{AB.}.$$

Mas,

$$DE = \frac{AB}{2};$$

d'onde

$$\frac{DG}{AG} = \frac{1}{2};$$

portanto,

$$DG = \frac{AG}{2}.$$

Si, pois, dividirmos a mediana AD em tres partes iguaes, virá :

$$DG = \frac{AD}{3};$$

logo,

$$AG = \frac{2}{3} AD;$$

isto é, que *o centro de gravidade da área d'um triangulo rectilineo e homogeneo dado acha-se sobre uma qualquer de suas medianas e aos dois terços d'esta linha, a partir do vertice considerado.*

153. *Centro de gravidade da área de um trapesio rectilineo e homogeneo qualquer.*— Seja (fig. 66) o trapesio $ABCD$. O centro de gravidade da área d'este trapesio se achará sobre a recta EF que une os meios das bases parallelas AB e CD.

Com effeito, podemos considerar a área $ABCD$ como dividida em uma infinidade de rectas parallelas ás bases e o centro de gravidade de cada uma d'estas rectas achando-se no respectivo meio, é claro que sobre EF, que passa por todos estes pontos, se achará o centro de gravidade do trapesio.

Isto posto, tracemos a diagonal AD e unamos os pontos A e E, D e F.

Dividamos a recta EF em tres partes iguaes, de modo que

$$FH = HL = LE.$$

Pelos pontos L e H tiremos as rectas LI e HK parallelamente á AB.

Resultará que os pontos I e K serão respectivamente os centros de gravidade dos triangulos ADC e ADB. Unamos os pontos I e K e teremos a recta IK, que evidentemente conterá o centro de gravidade do trapesio. Ora, o centro de gravidade devendo achar-se simultaneamente sobre as rectas IK e EF, existirá forçosamente sobre o ponto G, sua commum intersecção.

Os pontos I e K supportarão esforços proporcionaes ás áreas dos triangulos ADC e ADB, pois que são os respectivos centros de gravidade; então, o ponto G dividirá a recta IK em duas partes inversamente proporcionaes ás referidas áreas. Mas, as áreas d'estes triangulos estão entre si como as suas bases; d'onde

$$\frac{GI}{GK} = \frac{AB}{CD};$$

mas, tambem pela semelhança dos triangulos LGI e HGK, teremos:

$$\frac{GI}{GK} = \frac{GL}{GH};$$

d'onde

$$\frac{GL}{GH} = \frac{AB}{CD};$$

ou

$$\frac{GL + GH}{GL} = \frac{AB + CD}{AB};$$

d'onde

$$GL = \frac{AB \,.\, LH}{AB + CD}.$$

Fazendo, para simplificar a expressão

$$AB = b, \quad CD = b', \quad EF = m,$$

teremos:

$$GL = \frac{\frac{1}{3} mb}{b + b'}.$$

Sommando esta igualdade com a identidade

$$LE = \frac{1}{3} m,$$

virá:

$$GE = \frac{1}{3} m. \frac{2b + b'}{b + b'}.$$

Tal é a fórmula que, traduzida em linguagem vulgar, dá-nos a regra para a determinação do centro de gravidade do trapesio.

154. A distancia GF obtem-se mudando b em b' e b' em b na fórmula precedente, por ser $GF = m - GE$; d'onde

$$GF = \frac{1}{3} m. \frac{2b' + b}{b + b'}.$$

Sommando GE com GF, teremos a expressão da distancia EF que existe entre os meios das bases.

Tomando a relação

$$\frac{GE}{GF},$$

teremos:

$$\frac{GE}{GF} = \frac{2b + b'}{2b' + b} = \frac{b + \frac{b'}{2}}{b' + \frac{b}{2}},$$

proporção que nos dá a posição do centro de gravidade G do trapesio, por outra fórma. Com effeito (fig. 67), prolonguemos

em sentidos oppostos as duas bases AB e CD, de modo que

$DN = AB = b$, $AM = CD = b'$; e unamos os pontos M e N.

A intersecção de MN e EF será o ponto G. Para demonstrarmos, consideremos os dois triangulos semelhantes MGF e NGE. D'elles resulta:

$$\frac{GE}{GF} = \frac{EN}{FM} = \frac{ED + DN}{EA + AM} = \frac{\frac{b'}{2} + b}{\frac{b}{2} + b'},$$

relação achada pela comparação das expressões dos valores de GE e GF.

155. Si em logar da recta GE que une os meios das bases b e b' tivessemos a perpendicular h ás duas bases, designando por x e y as distancias do ponto G á CD e á AB, facilmente chegariamos a provar que

$$x = \frac{1}{3} h . \frac{2b + b'}{b + b'},$$

$$y = \frac{1}{3} h . \frac{2b' + b}{b + b'}.$$

Com effeito (fig. 68), tirando pelo ponto G a perpendicular PP', teremos :

$$\frac{x}{y} = \frac{GP}{GP'} = \frac{GE}{GF}.$$

156. *Centro de gravidade da área d'um polygono rectilineo e homogeneo qualquer.*— Determinado o centro de gravidade da área de cada triangulo ou trapesio componente do polygono dado, resultará um systema de forças parallelas applicadas aos differentes centros de gravidade e proporcionaes ás áreas componentes, cujo centro de gravidade total será o ponto de applicação do peso da área polygonal considerada.

157. *Centro de gravidade do volume d'um prisma homogeneo qualquer de bases parallelas.* — Determinados os centros de gravidade das superficies das bases do prisma, unam-se estes dois pontos; o ponto meio d'esta recta será o centro de gravidade do prisma. A demonstração é evidente, em vista do principio de symetria.

158. *Centro de gravidade do volume d'uma pyramide triangular homogenea.* — Seja (fig. 69) o tetraedro $VABC$. Seja E o centro de gravidade da base ABC e unamos este ponto ao vertice V da pyramide.

A recta VE conterá, em virtude do principio de symetria, o centro de gravidade procurado.

Para conhecermos a posição d'este ponto, determinemos o centro de gravidade F da face VAC.

As rectas VE e BF forçosamente se encontrarão no ponto G, pois que existem no mesmo plano VDB. E como, pelo principio de symetria, a recta BF deverá tambem conter o centro de gravidade da pyramide, o ponto G será este centro.

Unindo agora os pontos F e E, a recta EF será parallela e igual á terça parte de VB; e, por serem semelhantes os triangulos FGE e VGB, teremos :

$$\frac{VG}{GE} = \frac{VB}{EF};$$

d'onde

$$GE = \frac{EF}{VB} \cdot VG,$$

ou

$$GE = \frac{1}{3} VG.$$

Dividindo, finalmente, a recta VE em quatro partes iguaes, resultará que

$$GE = \frac{1}{4} VE;$$

portanto,

$$\frac{1}{4} VE = \frac{1}{3} VG;$$

d'onde, finalmente,

$$VG = \frac{3}{4} . VE;$$

isto é, que *o centro de gravidade d'um tetraedro homogeneo acha-se situado sobre a recta que une um dos seus vertices ao centro de gravidade da base opposta, aos tres quartos d'esta linha, a partir do mesmo vertice ou a um quarto a partir da base*. Esta regra é rigorosamente extensivel a uma pyramide qualquer.

159. *Centro de gravidade de um polyedro qualquer, de faces planas e homogeneo.*— Decomposto o polyedro dado em pyramides triangulares, procuremos o centro de gravidade de cada pyramide componente.

Os differentes centros de gravidade supportarão esforços proporcionaes aos volumes parciaes, os quaes constituirão um systema de forças parallelas. Determinado o centro geral d'este systema de forças parallelas, este será o centro de gravidade do volume do polyedro.

160. Agora que já mostramos como os principios de symetria facilitam a determinação dos centros de gravidade das figuras descontinuas, polygonaes ou polyedricas, passemos a tratar das figuras continuas.

As fórmulas

$$x_1 = \frac{\Sigma\,(px)}{P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma\,(py)}{P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma\,(pz)}{P}, \qquad (a)$$

já estabelecidas, sendo previamente transformadas em outras cujos termos sejam integraes definidas, poderão determinar os centros de gravidade das fórmas curvilineas, convenientemente definidas. E' o que vamos demonstrar.

161. *Centro de gravidade de um corpo solido de figura qualquer.*—Sejam (x_1, y_1, z_1) as coordenadas rectangulares do centro de gravidade de um corpo de fórma qualquer, homogeneo ou heterogeneo, cujo peso seja designado por P. Para

determinarmos as expressões dos valores d'estas coordenadas, dividamos o solido em partes infinitamente pequenas nos sentidos dos tres eixos coordenados, por tres series de planos parallelos aos eixos, traçados successivamente a distancias infinitamente pequenas uns dos outros. Um elemento qualquer do corpo terá o seu volume expresso pelo producto das tres dimensões infinitesimaes $(d\,x,\ d\,y,\ d\,z)$; e, designando-o por $d\,v$, teremos:

$$d\,v = d\,x\ d\,y\ d\,z.$$

Si ρ designa *o peso da unidade de volume* no ponto cujas coordenadas são (x, y, z), o peso do elemento $d\,v$ será:

$$d\,p = \rho\ d\,x\ d\,y\ d\,z.$$

Os momentos d'este peso em relação aos tres planos coordenados serão respectivamente

$\rho\ x.\ dx.\ dy.\ dz$, *em relação ao plano dos* yz;

$\rho\ y.\ dx.\ dy.\ dz$, *em relação ao plano dos* xz;

$\rho\ z.\ dx.\ dy.\ dz$, *em relação ao plano dos* xy.

Portanto, as fórmulas (a) se transformarão nas seguintes:

$$x_1 = \frac{\int\int\int \rho\ x.\ dx\ dy\ dz}{P},$$

$$y_1 = \frac{\int\int\int \rho\ y.\ dx\ dy\ dz}{P},$$

$$z_1 = \frac{\int\int\int \rho\ z.\ dx\ dy\ dz}{P},$$

sendo, por causa da expressão

$$dp = \rho\ dx\ dy\ dz,$$

o valor de P dado pela equação

$$P = \int\int\int \rho\ dx\ dy\ dz.$$

Substituindo, pois, este valor nas fórmulas precedentes, vem:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\int x\,dx \int dy \int \rho\,dz}{\int dx \int dy \int \rho\,dz}, \\ y_1 &= \frac{\int dx \int y\,dy \int \rho\,dz}{\int dx \int dy \int \rho\,dz}, \\ z_1 &= \frac{\int dx \int dy \int \rho\,z\,dz}{\int dx \int dy \int \rho\,dz}. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Para tomarmos os limites das integraes devemos conhecer a figura da superficie que termina o corpo no espaço, a qual, em relação aos eixos considerados, será da fórma

$$f(x, y, z) = 0.$$

162. Si o corpo é heterogeneo, dois casos podem ter logar. No primeiro, o corpo será composto de partes homogeneas de grandeza finita e a densidade sómente variará de uma parte á outra. As fórmulas precedentes, nas quaes ρ será uma constante, serão simplificadas com a eliminação d'esta quantidade.

Ellas serão :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\int x\,dx \int dy \int dz}{\int dx \int dy \int dz}, \quad y_1 = \frac{\int dx \int y\,dy \int dz}{\int dx \int dy \int dz}, \\ z_1 &= \frac{\int dx \int dy \int z\,dz}{\int dx \int dy \int dz}. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

A applicação d'estas fórmulas fará conhecer o centro de gravidade de cada parte homogenea, e o centro de gravidade geral será determinado pelas fórmulas *(a)*, nas quaes P designa o peso total do solido ; p, p', p'', etc. designam os pesos das differentes partes homogeneas de densidades differentes ; e (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') são as coordenadas dos differentes centros de gravidade das partes p, p', p'', etc.

No segundo caso, a densidade variará por gráos insensiveis no interior do corpo solido considerado e só a applicação das fórmulas *(b)*, nas quaes ρ será uma funcção conhecida das coordenadas (x, y, z), poderá permittir a solução do problema.

Si o solido é homogeneo em todas as suas partes, as fórmulas *(c)*, cujo denominador commum é o volume do solido, poderão dar-nos o centro de gravidade do mesmo corpo.

Devemos observar que, quer se trate de corpos heterogeneos ou de corpos homogeneos, a decomposição dos corpos em elementos infinitamente pequenos suppõe que as suas massas sejam formadas de uma materia continua, o que realmente não tem logar na natureza. Mas, podemos abstrahir da descontinuidade no interior dos corpos naturaes e applicar em todos os casos as fórmulas estabelecidas.

163. Consideremos agora os limites das integraes, isto é, o modo de effectuar as integrações indicadas. A equação da superficie do corpo

$$f(x, y, z) = o,$$

dá-nos, em geral, para um systema de valores de x e de y, dois valores de z, que designaremos por z' e z''. Si z' é o menor d'estes valores, começaremos effectuando a integração em relação a z da expressão

$$\int_{z''}^{z'} \rho \, dz ,$$

considerando x e y como constantes. A segunda integração será em relação a y. Para effectual-a, supponhamos que da equação do traço sobre o plano dos $x\,y$ de um cylindro cujo eixo é parallelo ao eixo dos z e que circumscreve a superficie do corpo

$$f(x, y, z) = o,$$

tiramos dois valores para y em funcção de um valor dado a x. Sejam y' e y'' estes dois valores e supponhamos que o

menor seja y'. Considerando x como uma constante, procuraremos a integral definida

$$\int_{y'}^{y''} dy \int_{z'}^{z''} \rho \, dz \, .$$

A terceira integral, em relação a x, terminará a integração do peso P.

Sejam:

$$x = a, \quad x = b$$

as equações de dois planos parallelos ao plano dos zy taes que o primeiro seja traçado pelo ponto da superficie

$$f(x, y, z) = o$$

mais proximo d'este plano e o segundo pelo ponto da mesma superficie mais afastado do referido plano dos zy.

Teremos assim determinado os limites da integral definida

$$P = \int_a^b dx \int_{y'}^{y''} dy \int_{z'}^{z''} \rho \, dz,$$

denominador commum das tres equações (b).

Quanto aos limites das integraes que se acham nos numeradores d'essas fórmulas (b), é claro que serão os mesmos que os indicados para o denominador P, pois que se referem ao mesmo corpo solido. Podemos, para mais clareza, indicar

as diversas operações de que acabamos de tratar, escrevendo as fórmulas (b) da maneira seguinte:

$$x_1 = \frac{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} x dx \int_{y=y'}^{y=y''} dy \int_{z=z'}^{z=z''} \rho\, dz}{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y'}^{y=y''} dy \int_{z=z'}^{z=z''} \rho\, dz},$$

$$y_1 = \frac{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y'}^{y=y''} y dy \int_{z=z'}^{z=z''} \rho\, dz}{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y'}^{y=y''} dy \int_{z=z'}^{z=z''} \rho\, dz},$$

$$z_1 = \frac{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y'}^{y=y'} dy \int_{z=z'}^{z=z''} \rho z\, dz}{\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=y'}^{y=y''} dy \int_{z=z'}^{z=z''} \rho\, dz}.$$

Taes são as fórmulas que definem a posição do centro de gravidade de um corpo solido de figura qualquer.

164. Si imaginarmos que o solido seja dividido em partes infinitamente pequenas sómente no sentido dos dois eixos horizontaes, dos x e dos y, por duas series de planos parallelos a estes eixos, traçados successivamente a distancias infinitamente pequenas uns dos outros, a fórma geometrica de cada um dos elementos assim obtidos seria a de um parallelipipedo rectangulo cuja base infinitesimal seria parallela ao plano horizontal dos xy ou situada n'este plano e cuja altura seria finita e parallela ao eixo dos z.

Assim, a expressão de cada volume elementar tornar-se-hia mais simples e teriamos:

$$dv = z\, dx\, dy\,;$$

portanto,

$$dp = \rho\, z\, dx\, dy.$$

D'onde as fórmulas (*b*) seriam:

$$x_1 = \frac{\int\int \rho\, xz\, dx\, dy}{\int\int \rho\, z\, dx\, dy},$$

$$y_1 = \frac{\int\int \rho\, yz\, dx\, dy}{\int\int \rho\, z\, dx\, dy},$$

$$z_1 = \frac{\int\int \rho\, z^2\, dx\, dy}{\int\int \rho\, z\, dx\, dy}.$$

A equação da superficie do corpo, em relação aos mesmos eixos coordenados, seria

$$z = f(x, y).$$

No caso de solidos homogeneos, as fórmulas precedentes se reduziriam simplesmente ás seguintes:

$$x_1 = \frac{\int\int xz\, dx\, dy}{\int\int z\, dx\, dy},$$

$$y_1 = \frac{\int\int yz\, dx\, dy}{\int\int z\, dx\, dy},$$

$$z_1 = \frac{\int\int z^2\, dx\, dy}{\int\int z\, dx\, dy}.$$

Taes são as fórmulas mais simples que, como vê-se facilmente, resultam das fórmulas (*c*), quando n'estas expressões, mudando dz em z, dispensamos um signal de integral. Estas fórmulas são devidas a A. Comte.

165. *Centro de gravidade da superficie de um corpo solido de figura qualquer.*— Consideremos um corpo solido e imaginemos que uma das suas tres dimensões torne-se constante e infinitamente pequena em relação ás outras duas.

E' claro que o centro de gravidade do corpo será o centro de gravidade de uma superficie. Seja, pois, esta superficie definida algebricamente pela equação rectilinea

$$z = f(x, y) \ .$$

Designemos por (x_1 , y_1 , z_1) as coordenadas rectangulas do centro de gravidade da superficie e seja ρ o valor do peso da superficie no ponto cujas abscissas são x e y, para uma área igual á unidade de superficie.

Chamando $d\omega$ o elemento da área da superficie n'este ponto, a sua projecção sobre o plano dos xy poderá ser representada por $dxdy$; d'onde

$$dx\, dy = d\omega \cos \nu \ ,$$

sendo ν o angulo que a normal á $d\omega$ ou ao plano tangente faz com o eixo dos z. Por ser

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} \ ,$$

teremos :

$$d\omega = dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \ .$$

O peso dp d'este elemento será :

$$dp = \rho\, d\omega = \rho\, dxdy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \ .$$

Designando por P o peso total da superficie, teremos :

$$P = \int dx \int \rho\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \ .$$

Substituindo este valor e o de dp nas fórmulas (a), virão as fórmulas seguintes:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Sigma(px)}{P} = \frac{\int x\,dx \int \rho\,dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\int dx \int \rho\,dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}, \\ y_1 &= \frac{\Sigma(py)}{P} = \frac{\int dx \int \rho y\,dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\int dx \int \rho\,dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}, \\ z_1 &= \frac{\Sigma(pz)}{P} = \frac{\int dx \int \rho z\,dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\int dx \int \rho\,dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} (d).$$

Da equação da superficie

$$z = (fx, y),$$

facilmente resultarão as expressões dos valores de $\frac{dz}{dx}$ e de $\frac{dz}{dy}$. Substituindo, pois, em logar de z, $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ os seus valores em funcção de x e de y, nas fórmulas precedentes, bem como o valor de ρ em funcção dada das mesmas variaveis x e y, essas fórmulas poderão ser applicadas.

166. Si a superficie é homogenea a densidade será uniforme e, portanto, o peso ρ será constante.

N'este caso, as fórmulas serão:

$$x_1 = \frac{\int x\,dx \int dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\int dx \int dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$y_1 = \frac{\int dx \int y\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\int dx \int dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$z_1 = \frac{\int dx \int z\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\int dx \int dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

167. Quanto aos limites d'estas integraes, facilmente serão indicados.

Designando por y' e y'' os valores de y correspondentes a dois pontos que, sobre a projecção do contorno da superficie no plano dos xy, têm a mesma abscissa x, a integração será primeiro feita em relação a y, e x será constante, desde $y = y'$ até $y = y''$.

Uma segunda integração em relação a x, desde $x = a$ até $x = b$, sendo estas equações pertencentes a dois planos parallelos ao plano dos zy, traçados pelos pontos extremos do mesmo contorno, terminará a solução do problema.

168. *Centro de gravidade de uma linha qualquer.* — Consideremos um corpo solido e imaginemos que duas das suas tres dimensões tornem-se constantes e infinitamente pequenas em relação á outra dimensão.

E' claro que o centro de gravidade do corpo será o centro de gravidade de uma linha.

Sejam

$$z = \varphi\,(x, y) \text{ e } z = \psi\,(x, y)$$

as equações rectilineas de uma curva dada.

Designemos por (x_1, y_1, z_1) as coordenadas rectangulas do centro de gravidade d'esta linha e seja ρ o valor do peso da linha no ponto cujas abscissas são x e y, para uma unidade de comprimento.

Chamando ds um elemento infinitesimal d'esta linha, teremos, em coordenadas rectangulas,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

O peso dp d'este elemento será:

$$dp = \rho\, ds = \rho\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Designando por P o peso total da linha, teremos:

$$P = \int \rho\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Substituindo este valor e o de dp nas fórmulas (a), virão as fórmulas seguintes:

$$x_1 = \frac{\Sigma\,(px)}{P} = \frac{\int \rho\, x\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\int \rho\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

$$y_1 = \frac{\Sigma\,(py)}{P} = \frac{\int \rho\, y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\int \rho\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

$$z_1 = \frac{\Sigma\,(pz)}{P} = \frac{\int \rho\, z\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\int \rho\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

Das equações da linha dada

$$z = \varphi\,(x,\, y) \text{ e } z\ \psi\,(x,\, y),$$

facilmente resultarão as expressões dos valores de $\frac{dy}{dx}$ e de $\frac{dz}{dx}$. Substituindo, pois, em logar de z, $\frac{dy}{dx}$ e ρ, os seus valores em funcção de x, nas fórmulas precedentes, estas fórmulas poderão ser applicadas.

169. Si a linha é homogenea, a sua densidade será uniforme e, portanto, o peso ρ será constante. N'este caso, as fórmulas serão:

$$x_1 = \frac{\int x\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{\int_{s_0}^{s_1} x\, ds}{l},$$

$$y_1 = \frac{\int y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{\int_{s_0}^{s_1} y\, ds}{l},$$

$$z_1 = \frac{\int z\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{\int_{s_0}^{s_1} z ds}{l},$$

designando por l o comprimento da parte determinada da curva da qual queremos achar o centro de gravidade.

170. Quanto aos limites d'estas integraes, serão indicados pelos valores dados a s, correspondentes ás extremidades do comprimento l.

Si a curva é plana, uma equação bastará para definil-a. Seja

$$y = f(x)$$

a sua equação. N'este caso, o plano dos xy será o da curva; então, façamos nas fórmulas precedentes

$$z_1 = o \text{ e } \frac{dz}{dx} = o.$$

Teremos, si a curva é homogenea, as fórmulas seguintes:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\int x\, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\int x\, ds}{\int ds} = \frac{\int_{s_0}^{s_1} x\, ds}{l} \\ y_1 &= \frac{\int y\, dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\int y\, ds}{\int ds} = \frac{\int_{s_0}^{s_1} y\, ds}{l} \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

sendo l o comprimento de um arco qualquer da curva comprehendido entre dois pontos dados.

171. *Centro de gravidade das figuras planas.* — As fórmulas *(d)* muito simples se tornam quando a superficie é plana. N'este caso, sendo o plano da figura o plano dos xy, teremos:

$$z_1 = o, \quad \frac{dz}{dx} = o \text{ e } \frac{dz}{dy} = o.$$

Assim, depois das substituições indicadas e designando os limites convenientes, resultarão as fórmulas seguintes:

$$x_1 = \frac{\int_a^b \rho\, x\, dx \int_o^y dy}{\int_a^b \rho\, dx \int_o^y dy} = \frac{\int_a^b \rho\, xy\, dx}{\int_a^b \rho\, y\, dx},$$

$$y_1 = \frac{\int_a^b \rho\, dx \int_o^y y\, dy}{\int_a^b \rho\, dx \int_o^y dy} = \frac{\int_a^b \rho\, y^2\, dx}{2\int_a^b \rho\, y\, dx},$$

que tambem poderiam ser estabelecidas directamente. A integração que fizemos em relação a y foi entre os limites

$y = o$ e $y = y$. O valor de y será dado em funcção de x, por meio da equação

$$y = f\ (x)$$

do contorno da figura dada. Si a área é homogenea, as fórmulas serão:

$$x_1 = \frac{\int_a^b x\ y\ dx}{\int_a^b y\ dx},\ y_1 = \frac{\int_a^b y^2\ dx}{2\int_a^b y\ dx}. \qquad (f)$$

172. Todas as fórmulas que deduzimos para a determinação das coordenadas do centro de gravidade das fórmas curvilineas foram systematicamente estabelecidas em relação a eixos coordenados rectangulares; mas algumas vezes será necessario, para facilitar as integrações, o emprego de coordenadas polares.

Limitando-nos a esta observação, dispensamo-nos de tratar da expressão dos elementos de volume, superficie ou linha em funcção d'estas ultimas coordenadas, por ser esta questão inteiramente estudada no calculo integral.

Uma outra observação devemos fazer.

Algumas vezes, a figura especial dos corpos nos indica espontaneamente um modo de decomposição em elementos differenciaes para o qual uma só operação será sufficiente para determinar o centro de gravidade dos mesmos corpos.

Basta que o corpo seja symetrico em relação a um plano, eixo, ou ponto, para que os principios de symetria nos forneçam a posição do seu centro de gravidade, como mostrámos em relação ás figuras descontinuas.

173. *Centro de gravidade d'um solido de revolução.*— Consideremos a superficie plana comprehendida entre as duas curvas CD, $C'D'$ e as duas parallelas CC', DD' ao eixo dos y (fig. 70).

Supponhamos que a área $CD\ C'D'$ gyre em torno do eixo Ox situado em seu plano e perpendicular ao eixo dos y.

O elemento de superficie $MNM'N'$ limitado pelas duas curvas CD e $C'D'$ e pelas parallelas infinitamente proximas MM' e NN' produzirá em sua rotação em torno do eixo Ox um volume elementar dV, que será igual á differença entre os volumes dos dois cylindros, cujas bases serão os circulos descriptos pelas rectas PM e PM' e cuja altura commum será PQ.

Portanto,

$$dV = \pi . PM^2 . PQ - \pi . PM'^2 . PQ.$$

Designando por (x, y) as coordenadas do ponto M, por (x, y') as coordenadas do ponto M' e por dx o accrescimo PQ da abscissa OP, a equação precedente será:

$$dV = \pi (y^2 - y'^2) dx.$$

Chamando a e b os limites da área OA e OB e integrando, teremos:

$$V = \pi \int_a^b (y^2 - y') dx.$$

O centro de gravidade do solido devendo achar-se, em virtude do principio de symetria, situado sobre o eixo de revolução Ox e o corpo sendo homogeneo, a abscissa x_1 do centro de gravidade será sufficiente para definil-o.

D'onde

$$x_1 = \frac{\Sigma (px)}{P} = \frac{\int_a^b x dV}{V} = \frac{\pi \int_a^b (y^2 - y'^2) x dx}{\pi \int_a^b (y^2 - y'^2) dx} =$$

$$= \frac{\int_a^b (y^2 - y'^2 x dx}{\int_a^b (y^2 - y'^2) dx}.$$

Os valores de y e y' serão dados em funcção de x pelas equações das curvas CD e $C'D'$. Nos casos usuaes, a curva interior $C'D'$ se confunde com o eixo Ox e teremos $y' = o$. Portanto, virá :

$$x_1 = \frac{\int_a^b y^2 \, xdx}{\int_a^b y^2 \, dx}. \qquad (g)$$

174. *Centro de gravidade d'uma superficie de revolução.*— Consideremos (fig. 71) a superficie produzida pela revolução da curva plana CD, gyrando em torno do eixo Ox situado em seu plano.

Por um ponto O d'este eixo tiremos uma recta Oy que lhe seja perpendicular e que se ache situada no plano da curva CD. Sejam Ox e Oy dois eixos coordenados. Designemos por (x, y) as coordenadas do ponto M da curva e por $(x + dx, y + dy)$ as do ponto M', infinitamente proximo de M e tambem situado sobre a mesma curva CD. Designemos por ds o arco infinitesimal MM', elemento da curva CD, e por dS a área elementar produzida pela revolução de ds em torno do eixo Ox.

Considerando que esta área elementar dS é a d'um tronco de cône, o meio de ds descreverá uma circumferencia igual a $2\pi \left(y + \frac{1}{2} dy \right)$ ou igual a $2\pi y$, desprezando $\frac{1}{2} dy$. E como o producto d'esta circumferencia pelo elemento ds dá-nos a medida da área dS, teremos :

$$dS = 2\pi \, y.ds.$$

Chamando a e b os limites das abscissas OA e OB da curva geratriz e integrando, virá:

$$S = 2\pi \int_a^b yds.$$

O centro de gravidade da superficie do solido devendo achar-se, em virtude do principio de symetria, situado sobre o eixo de revolução Ox e a superficie sendo homogenea, a abscissa x_1 do centro de gravidade bastará evidentemente para definir a sua posição.

D'onde

$$x_1 = \frac{\Sigma(p\,x)}{P} = \frac{\int_a^b x\,y\,d\,s}{\int_a^b y\,d\,s}, \qquad (h)$$

sendo o valor de y dado em funcção de x pela equação da curva geratriz $C\,D$.

175. Conhecidas as fórmulas geraes para a determinação dos centros de gravidade, fica esta questão reduzida, em cada caso particular, a indagações algebricas analogas ás questões de quadraturas, rectificações e cubaturas.

E como as integrações são geralmente mais complexas para a determinação dos centros de gravidade, que para as avaliações geometricas da extensão, o calculo integral raramente permittirá applicações satisfactorias. Entretanto, as fórmulas geraes que estabelecemos têm uma importancia logica, capital, pois na dynamica dos systemas o conhecimento da posição do centro de gravidade de cada corpo é essencial.

A titulo de exercicios, façamos algumas simples applicações.

176. *Arco de circulo.* — Seja $B\,A\,C$ (fig. 62) o arco considerado.

Pelo ponto A, meio d'este arco, tiremos o diametro $A\,A'$ para eixo das abscissas.

Pelo ponto O, centro do circulo, tiremos um eixo $O\,y$ perpendicular a $O\,x$ e situado no plano da curva.

Sejam (x, y) as coordenadas do ponto M e chamemos r o raio OM, l o arco BAC e s um arco qualquer AM.

Teremos :

$$x = OP = OM \cos MOP = r \cos \frac{s}{r} .$$

A primeira das fórmulas (e),

$$x_1 = \frac{1}{l} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} x \, ds ,$$

dá-nos :

$$\left. \begin{aligned} l x_1 = \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} x \, ds = \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} r \cos \frac{s}{r} \, ds = \\ = r^2 \, sen \, \frac{r}{s} + C. \end{aligned} \right\} (1)$$

Para determinar a constante, façamos $s = -\frac{1}{2} l$ e como a integral annulla-se, teremos :

$$0 = - r^2 \, sen \frac{l}{2r} + C;$$

d'onde

$$C = r^2 \, sen \, \frac{l}{2r} .$$

Substituindo este valor na equação (1) teremos :

$$l x_1 = r^2 \, sen \, \frac{s}{r} + r^2 \, sen \, \frac{l}{2r} .$$

Fazendo

$$s = \frac{1}{2} l$$

para definir a integral desde C até B, vem :

$$lx_1 = 2r^2 \; sen \frac{l}{2r} = r \, . \, 2r \; sen \frac{l}{2r} \, .$$

Por ser a corda CB dada pela expressão

$$BC = 2r \; sen \; \frac{l}{2r},$$

resultará :

$$lx_1 = r \, . \, BC.$$

Designando por c a corda BC, teremos :

$$x_1 = \frac{r \, . \, c}{l} \; ;$$

isto é, que *a distancia do centro de gravidade d'um arco de circulo ao centro do mesmo circulo é uma quarta proporcional ao arco, á sua corda e ao raio.*

177. *Paraboloide de revolução.*— Seja para exemplo da determinação do centro de gravidade d'um solido de revolução, o centro de gravidade do volume produzido pela revolução da área parabolica $O \; M \; P$ em torno d'um eixo Ox (fig. 73) situado em seu plano. A fórmula (g) será, n'este caso,

$$x_1 = \frac{\int_0^x y^2 x dx}{\int_0^x y^2 dx},$$

sendo

$$y^2 = 2 \, px$$

a equação da curva a que pertence o arco $O \; M$.

Applicando-a, teremos :

$$x_1 = \frac{\int y^2 \; xdx}{\int y^2 \; dx} = \frac{2 \; p \, . \, \frac{x^3}{3}}{2 \; p \, . \, \frac{x^2}{2}} = \frac{2}{3} \; x.$$

178. *Zona espherica.*— Seja CD um arco de circulo, que, pela sua rotação em torno do eixo Ox situado em seu plano (fig. 74), produz a zona espherica de cuja área queremos determinar o centro de gravidade.

Tomemos

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OE = r.$$

A equação da curva geratriz será:

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

d'onde

$$dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{y^2};$$

portanto,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{r\,dx}{y}.$$

A fórmula (g),

$$x_1 = \frac{\int_a^b xy\,ds}{\int_a^b y\,ds},$$

dá-nos:

$$x_1 = \frac{\int_a^b xy \cdot \frac{r\,dx}{y}}{\int_a^b y \cdot \frac{r\,dx}{y}} = \frac{\int_a^b x\,dx}{\int_a^b dx};$$

mas,

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

$$\int_a^b dx = b - a;$$

portanto,

$$x_1 = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2};$$

isto é, que *o centro de gravidade de uma zona espherica acha-se sobre o diametro perpendicular ás duas bases e a igual distancia d'estas bases.*

179. *Methodo centrobarico.*—Paulo Guldin, em sua obra *De centro gravitatis*, que começou a ser publicada em 1635, fez innumeras applicações do *methodo centrobarico*, constituido pelas duas leis seguintes :

Primeira lei. A área produzida pela revolução de uma curva plana em torno de um eixo, situado em seu plano, é igual ao producto do comprimento do arco gerador pela circumferencia descripta por seu centro de gravidade.

Com effeito (fig. 75), si a curva plana *CD*, cujo comprimento designaremos por l, gyra em torno do eixo $O x$ traçado em seu plano, a área S produzida por esta revolução será dada pela expressão seguinte :

$$S = 2 \pi \int_a^b y \, ds.$$

Si G é o centro de gravidade da curva plana *CD*, a sua ordenada y_1 será definida pela fórmula

$$y_1 = \frac{\int_a^b y \, ds}{l} ;$$

d'onde

$$l \, y_1 = \int_a^b y \, ds.$$

Multiplicando esta equação por 2π, vem .

$$2 \pi y_1 \, . \, l = 2 \pi . \int_a^b y \, ds ;$$

portanto,

$$S = 2 \pi y_1 \, . \, l$$

como queriamos demonstrar.

180. Si a curva *CD* não chegasse a effectuar uma revolução completa e só gyrasse d'um angulo θ, chamando S' a área produzida, teriamos

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\pi}{\theta}$$

d'onde

$$S' = 2\frac{S}{\pi}\theta = \theta y_1 . l,$$

θy_1 sendo o arco descripto n'essa revolução pelo centro de gravidade.

181. *Segunda lei. O volume que a área d'uma curva plana produz por sua revolução em torno d'um eixo situado em seu plano é igual ao producto da área geratriz pela circumferencia descripta por seu centro de gravidade.*

Si a área *A C D B*, cuja extensão λ é dada pela equação

$$\lambda = \int_a^b y\, dx,$$

gyrasse em torno do eixo *Ox* traçado em seu plano, o volume produzido seria

$$V = \pi . \int_a^b y^2\, dx.$$

Si G é o centro de gravidade da área geratriz, a sua ordenada y_1 será dada pela fórmula seguinte :

$$y_1 = \frac{\int_a^b y^2\, dx}{2\int_a^b y\, dx};$$

d'onde

$$V = 2\pi y_1 . \lambda$$

como queriamos demonstrar.

182. Si a área λ não chegasse a effectuar uma revolução completa e só gyrasse d'um angulo θ, chamando V' o volume produzido, teriamos :

$$\frac{V}{V'} = \frac{2\pi}{\theta};$$

d'onde

$$V' = \frac{V}{2\pi}\theta = \theta y_1 . \lambda,$$

θy_1 sendo o arco descripto pelo centro de gravidade.

183. Estas duas leis de Guldin servem para determinar o valor da superficie e do volume d'um solido de revolução, todas as vezes que o centro de gravidade da geratriz fôr conhecido ; mas, quando tivermos de calcular a ordenada y_1, é claro que o emprego d'essas duas regras não terá nenhuma importancia, pois este calculo será o mesmo que o da superficie ou volume do solido da revolução :

« Graças a estas ligações, muitos corpos podem ser immediatamente quadrados ou cubados, porque os centros de gravidade das figuras correspondentes são espontaneamente conhecidos.

Deve-se sobretudo reconhecer que estas relações tornam as medidas dos corpos redondos essencialmente independentes da situação das directrizes quanto ao eixo de rotação, emquanto que essa posição poderia muitas vezes augmentar os embaraços algebricos.» (A. Comte.)

Como exercicio façamos algumas applicações.

184. *Cylindro recto circular.* — A superficie lateral do cylindro é produzida pela recta $A\ B$ (fig. 76), gyrando em torno do eixo $O\ x$ situado em seu plano e parallelo a este eixo. Sejam $A\ B = h$ e $O\ A = r$. Teremos, designando por S a área da superficie lateral,

$$S = 2\pi y_1 . l = 2\pi r . h.$$

185. O volume do cylindro é produzido pela revolução da área do rectangulo $O\ A\ \ B\ C$ em torno do eixo Ox (fig. 77),

situado em seu plano. Sejam $A\ B = h$ e $O\ A = r$. Teremos, V designando o volume procurado,

$$V = 2\ \pi\ y_1\ .\ \lambda = 2\ \pi.\ \frac{r}{2}\ .\ r\ h = \pi\ r^2\ h.$$

186. *Cône recto circular.*— A recta O A (fig. 78), gyrando em torno do eixo Ox situado em seu plano, produz uma superficie conica.

Em virtude da 1ª lei de Guldin, teremos:

$$S = 2\ \pi\ y_1\ .\ l\ ;$$

mas,

$$\frac{y_1}{r} = \frac{O\ G}{O\ A} = \frac{1}{2}\ ;$$

d'onde

$$y_1 = \frac{r}{2}\ ;$$

portanto,

$$S = \pi\ r\ l,$$

sendo $O\ A = l$.

187. O volume V do cône é produzido pela revolução do triangulo rectangulo $A\ O\ B$ (fig. 79), em torno do eixo Ox, situado em seu plano. A 2ª lei de Guldin dá-nos:

$$V = 2\ \pi\ y_1\ .\ \lambda.$$

mas, por causa da mediana $A\ C$,

$$\frac{y_1}{r} = \frac{G\ C}{A\ C} = \frac{1}{3}\ ;$$

d'onde

$$y_1 = \frac{r}{3}\ ;$$

portanto,

$$V = \frac{2}{3}\ \pi\ r\ .\ \frac{O\ B \times r}{2} = \frac{h}{3}\ \pi\ r^2,$$

sendo $O\ B = h$.

188. *Esphera.*— A semi-circumferencia $A\ M\ B$ (fig. 80), gyrando em torno do eixo $O\ x$ situado em seu plano, produz uma superficie espherica. Em virtude da 1ª lei de Guldin,

$$S = 2\ \pi\ y_1\ .\ l\ ;$$

mas sendo r o raio, c a corda e l o comprimento d'um arco de circulo, teremos :

$$y_1 = \frac{r\ .\ c}{l} = \frac{r\ .\ 2\ r}{\pi\ r} = \frac{2\ r}{\pi},$$

por ser

$$l = \pi\ r.$$

Portanto, a superficie da esphera será:

$$S = 2\ \pi.\ \frac{2\ r}{\pi}.\ \pi\ r = 4\ \pi\ r^2.$$

189. A 2ª lei de Guldin dá-nos :

$$V = 2\ \pi\ y_1\ .\ \lambda\ ;$$

mas o centro de gravidade da área d'um semi-circulo e esta área são dados pelas relações seguintes :

$$y_1 = \frac{4\ r}{3\ \pi}\ \text{e}\ \lambda = \frac{\pi\ r^2}{2}.$$

Portanto, o volume da esphera será

$$V = 2\ \pi.\ \frac{4\ r}{3\ \pi}\ .\ \frac{\pi\ r^2}{2} = \frac{4}{3}\ \pi\ r^3.$$

Taes são as applicações mais simples do methodo centrobarico, cujas leis, embora demonstradas por Guldin, já haviam sido formuladas por Pappus, um dos derradeiros geometras da escola de Alexandria.

2. COMPOSIÇÃO DAS GRAVITAÇÕES ELEMENTARES

190. A acção do sol sobre os planetas e d'estes sobre os seus satellites designa-se mui propriamente pelo precioso nome de *gravitação* ([1]). Em virtude da terceira lei fundamental da mecanica, esta acção é necessariamente mutua: o sol pesa ou gravita continuamente para cada planeta e reciprocamente os planetas gravitam para o sol.

A gravidade é um caso particular da gravitação; é a gravitação dos corpos para o nosso globo.

A Isaac Newton devemos a lei segundo a qual varia esta grande força, lei que, conforme a bella expressão de A. Comte, *é o resultado mais sublime do conjuncto de nossos estudos sobre a natureza.*

Ella consiste precisamente em que *todas as moleculas do nosso mundo gravitam constantemente umas para as outras, na razão directa de suas massas e na razão inversa dos quadrados de suas mutuas distancias.*

Não é do dominio da mecanica geral e sim da mecanica celeste o exame d'esta importante lei, apenas enunciada para esclarecer-nos a respeito da natureza das forças cuja composição necessitamos apreciar.

Si todas as moleculas do nosso mundo gravitam umas para as outras, é claro que a acção mutua de dois astros quaesquer do mesmo systema deve ser considerada como uma força resultante de uma infinidade de componentes elementares.

([1]) Este termo *gravitação*, introduzido na sciencia pelos successores de Newton, é mais proprio que o de *attracção*, empregado por este grande geometra.

Não ha negar, é mais commum dizer-se attracção, mas, conforme pondera A. Comte, esta expressão realmente affirma uma tendencia a penetrar o inaccessivel mysterio do modo essencial de producção dos phenomenos celestes. O emprego da palavra attracção leva-nos a comparar a acção mutua dos astros ao esforço de *tracção* que exercemos para puxar um corpo com o auxilio de uma ligação intermediaria; mas esta tracção, abstrahindo-se da massa e da rijeza da ligação, jámais variará com a distancia. Póde o movel achar-se a dez ou a vinte metros distante de nós, o esforço que fizermos, capaz de puxal-o, será constantemente o mesmo, ao passo que a gravitação de um corpo será effectivamente quatro vezes menor quando a distancia tornar-se dupla da primitiva.

Supponhamos (fig. 81) que P seja um ponto material de massa μ situado de uma maneira qualquer no espaço e gravitando para um corpo tambem situado do mesmo modo.

Seja O um ponto fixo tomado no interior d'este corpo, pelo qual são traçados tres eixos coordenados rectangulares Ox, Oy, Oz.

Designemos por (α, β, γ) as tres coordenadas do ponto P e por (x, y, z) as de um ponto qualquer M do referido corpo, cuja massa seja dm. Chamando u a distancia PM, teremos :

$$u^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2.$$

A gravitação que a massa dm exerce sobre a massa μ será dirigida segundo a recta PM e, em virtude da lei de Newton, esta força será proporcional ao producto das duas massas e na razão inversa do quadrado da distancia u.

Designada por F, ella será medida pela expressão :

$$F = \frac{f \mu \, dm}{u^2},$$

sendo f a acção exercida pela unidade de massa sobre a unidade de massa á unidade de distancia.

Designando por (a, b, c) os angulos que a recta PM faz respectivamente com os tres eixos rectangulares, teremos:

$$\alpha - x = u \cos a, \; \beta - y = u \cos b, \; \gamma - z = u \cos c;$$

d'onde

$$\cos a = \frac{\alpha - x}{u}, \; \cos b = \frac{\beta - y}{u}, \; \cos c = \frac{\gamma - z}{u};$$

portanto, as tres componentes da força F serão :

$$\frac{\alpha - x}{u} F, \; \frac{\beta - y}{u} F, \; \frac{\gamma - z}{u} F;$$

d'onde, designando por (A, B, C) as tres componentes, segundo os mesmos eixos, da gravitação total exercida sobre o ponto P por toda a massa do corpo considerado, teremos:

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu . f \int\int\int \frac{\alpha - x}{u^3}\, dm, \\ B &= \mu . f \int\int\int \frac{\beta - y}{u^3}\, dm, \\ C &= \mu . f \int\int\int \frac{\gamma - z}{u^3}\, dm, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

por serem μ e f duas constantes dadas.

Si ρ designa a densidade do elemento dm e dv o seu volume, teremos:

$$dm = \rho\, dv = \rho\, d\, x\, dy\, dz.$$

Quando o corpo que actua sobre o ponto P fôr homogeneo, esta quantidade ρ será uma constante; mas, no caso geral, será uma funcção conhecida das coordenadas do ponto M.

191. As integraes comprehendidas nas expressões (*1*) podem ser reduzidas a uma unica integral triplice

$$T = \int\int\int \frac{dm}{u},$$

cujos limites serão os mesmos que os das integraes (A, B, C).

Para demonstrarmos, consideremos a equação

$$u^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2.$$

Ella dá-nos:

$$\frac{d\, \frac{1}{u}}{d\, \alpha} = \frac{x - \alpha}{u^3}, \quad \frac{d\, \frac{1}{u}}{d\, \beta} = \frac{y - \beta}{u^3}, \quad \frac{d\, \frac{1}{u}}{d\, \alpha} = \frac{z - \gamma}{u^3};$$

d'onde, differenciando a integral T sob o signal de integração em relação ás coordenadas $(\alpha, \beta, \gamma,)$ do ponto P, pois os

limites d'esta integral são independentes da posição d'este ponto, teremos:

$$\frac{dT}{d\alpha} = \int\int\int \frac{x-\alpha}{u^3} dm,$$

$$\frac{dT}{d\beta} = \int\int\int \frac{y-\beta}{u^3} dm,$$

$$\frac{dT}{d\gamma} = \int\int\int \frac{z-\gamma}{u^3} dm;$$

portanto, as equações (*1*) serão transformadas nas seguintes:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\mu f \frac{dT}{d\alpha}, \\ B &= -\mu f \frac{dT}{d\beta}, \\ C &= -\mu f \frac{dT}{d\gamma}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

que nos determinão as tres componentes (A, B, C) independentemente de qualquer outra integração.

Assim, todo o calculo d'estas tres componentes reduz-se á determinação da integral

$$T = \int\int\int \frac{dm}{u},$$

abrangendo toda a massa do corpo considerado.

As componentes da gravitação exercida sobre um corpo de fórma e de dimensões quaesquer facilmente serão deduzidas das fórmulas precedentes.

Com effeito, basta substituirmos μ pelo elemento differencial de sua massa

$$d\mu = \rho\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

e integrarmos depois em relação ás variaveis ($\alpha, \beta, \gamma,$) em toda a extensão d'essa massa.

Resultarão para o calculo das tres componentes (A, B, C) da gravitação exercida por um corpo sobre outro corpo, em geral, fórmulas que conterão integraes sextuplas.

Taes seriam as fórmulas que em todos os casos poderiam ser applicadas ao calculo da gravitação mutuamente exercida entre dois astros de figura qualquer, quando fosse conhecida a lei da densidade no interior de cada um d'elles e o calculo integral permittisse.

A composição das gravitações elementares offerece grandes difficuldades algebricas que seriam necessariamente insuperaveis si a fórma dos astros fosse muito complicada.

A figura quasi espherica dos astros do nosso mundo torna, felizmente, muito simples a solução d'esse problema, que Newton foi o primeiro a dar.

192. Determinemos, pois, a resultante das gravitações que uma camada espherica homogenea e de espessura constante exerce sobre um ponto situado no interior ou no exterior de sua superficie. Seja P o ponto considerado e O o centro da camada espherica supposta.

A gravitação exercida por esta camada espherica sobre o ponto P será evidentemente dirigida segundo a recta PO. Com effeito, tomemos em particular uma molecula M da camada espherica. A acção que ella exerce sobre o ponto P será dirigida segundo a distancia PM. Decomponhamos esta força em duas outras: uma dirigida segundo PO e outra normalmente a esta recta, segundo PN. Ora, esta ultima força é evidentemente destruida pela componente normal PN' da força igualmente exercida sobre o ponto P por uma molecula M' da camada espherica, symetrica de M em relação á recta PO. E como esta conclusão será inteiramente a mesma, qualquer que seja a situação da molecula M que considerarmos, é claro que só resultarão as forças dirigidas segundo PO, cuja somma será a acção total exercida por toda a camada espherica sobre o ponto P, como queriamos demonstrar.

Façamos, pois, coincidir a recta PO com o eixo Ox. As componentes B e C segundo os eixos Oy e Oz serão nullas e e só nos restará o calculo do valor da força A.

Para effectual-o, mudemos as coordenadas rectangulares em coordenadas polares. O eixo Ox tendo coincidido com a recta OP, teremos:

$$OP = \alpha, \ \beta = o, \ \gamma = o.$$

As coordenadas polares (r, θ, ψ) do ponto M serão:

$$OM = r, \ MOx = \theta, \ M\,E\,Q = \psi,$$

designando por ψ o angulo formado pelo plano MOx com o plano fixo xoy.

Os valores das primitivas coordenadas (x, y, z) em funcção das novas serão dados pelas expressões seguintes:

$$x = OE = r \cos \theta,$$

$$y = QE = ME \cos \psi = r \operatorname{sen} \theta \cos \psi,$$

$$z = MQ = ME \operatorname{sen} \psi = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi;$$

d'onde o elemento do volume dv será:

$$dv = dx\, dy\, dz = r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\,\theta\, d\,\psi; \ [1]$$

portanto, o elemento da massa dm será:

$$dm = \rho\, r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\,\theta\, d\,\psi,$$

---

[1] Differenciando as fórmulas precedentes, vem:

$$\left.\begin{array}{l} dx = -r d\theta \operatorname{sen} \theta + dr \cos \theta = Q d\theta + R\, dr, \\ dy = r\,(-d\psi \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta + d\,\theta \cos \theta \cos \psi) + dr \operatorname{sen} \theta \cos \psi = P'\, d\,\psi \\ + Q'\, d\,\theta + R' dr, \\ dz = r\,(d\psi \cos \psi \operatorname{sen} \theta + d\,\theta \cos \theta \operatorname{sen} \psi) + dr \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi = P''\, d\,\psi \\ + Q''\, d\,\theta + R''\, dr; \end{array}\right\} (a)$$

sendo:

$$P' = -r \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta, \quad Q = -r \operatorname{sen} \theta, \quad R = \cos \theta,$$

$$P'' = r \cos \psi \operatorname{sen} \theta, \quad Q' = r \cos \theta \cos \psi, \quad R' = \operatorname{sen} \theta \cos \psi,$$

$$Q'' = r \cos \theta \operatorname{sen} \psi, \quad R'' = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi.$$

ρ sendo uma constante por ser homogenea a camada espherica.

Para obtermos a expressão do producto $dx\,dy\,dz$, calcularemos primeiro a expressão de dx na hypothese de y e z constantes. Fazendo, pois, $dy = o$ e $dz = o$, as equações *(a)* se mudam nas seguintes:

$$dx = Q\,d\,\theta + R\,dr,$$

$$o = P'\,d\,\psi + Q'\,d\,\theta + R'\,dr,$$

$$o = P''\,d\,\psi + Q''\,d\,\theta + R''\,dr;$$

d'onde

$$dx = \left(\frac{Q\,(P''\,R' - P'\,R'') + R\,(P'\,Q'' - P''\,Q')}{Q'\,R'' - Q''\,R'}\right) d\,\psi. \qquad (b)$$

Esta expressão referindo o producto $dx\,dy\,dz$ ás variaveis ψ, y, z, acharemos dy, fazendo $d\,\psi = o$ e $dz = o$ nas duas ultimas equações *(a)*. Ellas se mudarão n'estas:

$$dy = Q'\,d\theta + R'\,dr,$$

$$o = Q''\,d\,\theta + R''\,dr;$$

d'onde

$$dy = \left(\frac{Q'\,R'' - R'\,Q''}{R''}\right) d\,\theta. \qquad (c)$$

Finalmente, as variaveis sendo actualmente ψ, θ e z, façamos $d\,\psi = o$ e $d\,\theta = o$ na ultima das equações *(a)*. Ella se reduzirá á seguinte:

$$dz = R''\,dr. \qquad (d)$$

Multiplicando membro a membro as equações *(b)*, *(c)* e *(d)*, teremos:

$$dx\,dy\,dz = \left[Q\,(P''\,R' - P'\,R'') + R\,(P'\,Q'' - P''\,Q')\right] dr\,d\,\theta\,d\,\psi.$$

Substituindo n'esta expressão os valores de P', P'', Q, Q', Q'', R, R', R'', resultará:

$$dx\,dy\,dz = -\,r^2\,sen\,\theta\,dr\,d\,\theta\,d\,\psi\,;$$

mas, como podemos n'este caso dar o signal positivo a este coefficiente, porque o signal que affecta o elemento de volume $dx\,dy\,dz$ não altera a integração, teremos:

$$dx\,dy\,dz = +\,r^2\,sen\,\theta\,dr\,d\,\theta\,d\,\psi,$$

ou

$$d\,v = r^2\,sen\,\theta\,dr\,d\,\theta\,d\,\psi.$$

Tal é a fórmula que deduzimos em nota por ser esta questão estranha á mecanica. No calculo integral estuda-se a deducção d'essa fórmula mais facilmente, d'um modo directo, mas não podiamos aqui seguir outra marcha.

A distancia PM, designada por u, resultará da equação:

$$u^2 = \alpha^2 - 2\,\alpha\,r\cos\theta + r^2.$$

Isto posto, tomemos a expressão de T,

$$T = \int\int\int \frac{dm}{u}$$

e n'ella substituamos os valores de dm e de u. Virá:

$$T = \int\int\int \frac{\rho\,r^2 \,sen\,\theta\,d\,r\,d\,\theta\,d\,\psi}{\sqrt{\alpha^2 - 2\,\alpha\,r\cos\theta + r^2}}.$$

Designemos agora os limites d'esta integração. Chamando l e l' os comprimentos dos raios exterior e interior da camada espherica, a integração será feita desde $r = l'$ até $r = l$. Os angulos θ e ψ serão tomados desde $\theta = 0$ e $\psi = 0$ até $\theta = \pi$ e $\psi = 2\,\pi$. Portanto,

$$T = 2\,\pi\,\rho \int_{l'}^{l} \left(\int_{0}^{\pi} \frac{r\,sen\,\theta\,d\,\theta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\,\alpha\,r\cos\theta + r^2}} \right) r\,d\,r,$$

após a primeira integração, feita em relação a ψ.

No limite $\theta = 0$,

$$u = \sqrt{\alpha^2 - 2\,\alpha\,r\cos\theta + r^2} = \sqrt{\alpha^2 - 2\,\alpha\,r + r^2} =$$
$$= \sqrt{(\alpha - r)^2} = \pm(\alpha - r)$$

e no limite $\theta = \pi$,

$$u = \sqrt{\alpha^2 - 2\,\alpha\,r\cos\theta + r^2} = \sqrt{\alpha^2 + 2\,\alpha\,r + r^2} =$$
$$= \sqrt{(\alpha + r)^2} = \pm(\alpha + r);$$

mas, como u deve ser uma grandeza sempre positiva, devemos tomar no limite $\theta = 0$, $u = r - \alpha$ e no limite $\theta = \pi$, $u = \alpha + r$, no caso em que $r > \alpha$, isto é, quando o ponto P fôr situado no interior da camada espherica. E quando este

ponto P fôr exterior á camada espherica, teremos $r < \alpha$, d'onde os limites serão: para $\theta = o$, $u = \alpha - r$; e para $\theta = \pi$, $u = \alpha + r$.

Façamos agora a integração em relação á variavel θ. A expressão d'esta integral

$$\int_0^\pi \frac{r \, sen \, \theta \, d \, \theta}{\sqrt{\alpha^2 - 2 \alpha \, r \cos \theta + r^2}},$$

dá-nos, sem considerar os limites,

$$\int \frac{r \, sen \, \theta \, d \, \theta}{\sqrt{\alpha^2 - 2 \, \alpha \, r \cos \theta + r^2}} = \int \frac{\frac{u \, du}{\alpha}}{u} = \frac{1}{\alpha} \int du = \frac{1}{\alpha} u + C =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 2 \, \alpha \, r \cos \theta + r^2} + C,$$

por ser

$$u^2 = \alpha^2 - 2 \, \alpha \, r \cos \theta + r^2.$$

Distinguindo os dois casos considerados, teremos:

1.° Quando o ponto P é situado no interior da camada espherica (fig. 82),

$$\int_0^\pi \frac{r \, sen \, \theta \, d \theta}{\sqrt{\alpha^2 - 2 \, \alpha \, r \cos \theta + r^2}} = \frac{1}{\alpha} \left[(r + \alpha) - (r - \alpha) \right] = 2;$$

d'onde o valor de T será:

$$T = 2 \pi \rho \int_{l'}^{l} 2 \, r \, d \, r = 2 \pi \rho \, r^2 = 2 \pi \rho \, (l^2 - l'^2);$$

d'onde, differenciando esta equação em relação a α, teremos:

$$\frac{d \, T}{d \, \alpha} = o;$$

portanto, a primeira das equações (2) dá-nos :

$$A = - \mu f \frac{d\,T}{d\,\alpha} = o\,;$$

isto é, que *a resultante das gravitações de todos os pontos materiaes d'uma camada espherica homogenea e de espessura constante sobre um ponto material collocado em seu interior é nulla.*

2.º Quando o ponto P é situado no exterior da camada espherica,

$$\int_0^{\pi} \frac{r\ sen\ \theta\ d\ \theta}{\sqrt{\alpha^2 - 2\,\alpha\,r\cos\theta + r^2}} = \frac{1}{\alpha}\left[(\alpha + r) - (\alpha - r)\right] = \frac{2r}{\alpha}.$$

Por conseguinte, o valor de T será :

$$T = 2\,\pi\,\rho \int_{l'}^{l} \frac{2r}{\alpha}.\,rdr = \frac{4\pi\rho}{\alpha}\int_{l'}^{l} r^2dr\,;$$

d'onde

$$T = \frac{4\pi\rho}{\alpha}\cdot\frac{r^3}{3} = \frac{4\pi\rho}{3\alpha}(l^3 - l'^3)\,;$$

ou, designando por M a massa da camada espherica cujo volume é

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(l^3 - l'^3)$$

e cuja densidade é ρ, virá :

$$T = \frac{M}{\alpha}\,;$$

d'onde, differenciando em relação a α, teremos :

$$\frac{dT}{d\alpha} = - \frac{M}{\alpha^2}\,;$$

portanto, resultará :

$$A = - \mu\,f\,.\frac{dT}{d\alpha} = \frac{\mu M f}{\alpha^2}\,; \qquad (3)$$

isto é, que *a gravitação exercida por uma camada espherica homogenea e de espessura constante sobre um ponto material exterior a esta camada é igual á gravitação que este ponto soffreria si toda a massa da camada fosse reunida em seu centro.*

193. Consideremos agora um corpo composto de camadas esphericas e concentricas cuja densidade varie de uma a outra segundo uma lei qualquer, mas não mude em toda a extensão de uma mesma camada.

Si o ponto P acha-se situado no interior do corpo, é claro que, por ser nulla a resultante das acções de cada camada sobre o mesmo ponto, a gravitação total será tambem nulla.

Si o ponto P acha-se situado no exterior do corpo, cada uma de suas camadas gravitando como si toda a respectiva massa fosse reunida em seu centro, é claro que a gravitação total do corpo sobre o mesmo ponto será dada pela fórmula (*3*), M sendo sempre a massa total do corpo considerado.

194. Si o ponto P faz parte da camada espherica (fig.84), teremos :

$$OP > OL' \quad \text{e} \quad OP < OL\,,$$

ou,

$$\alpha > l' \quad \text{e} \quad \alpha < l\,.$$

N'este caso, conceberemos a camada espherica dividida em duas outras : uma cujos raios exterior e interior sejam l e α, outra cujos raios exterior e interior sejam α e l'.

O ponto P achando-se então no interior da primeira d'estas duas camadas e no exterior da segunda, não soffrerá a acção da primeira e sómente soffrerá da segunda camada uma acção igual á que soffreria si a sua massa se achasse concentrada em seu centro.

Designando por m a massa d'esta segunda camada, a sua gravitação sobre o ponto P será calculada pela fórmula (*3*), na qual a massa M deve ser substituida por m. Ella será :

$$A = \frac{\mu m f}{\alpha^2}\,.$$

195. Si a segunda camada espherica muda-se em uma esphera inteiramente cheia, homogenea em toda a sua massa m, teremos $l' = o$. Suppondo $l = \alpha$, o ponto P ficará situado na superficie d'esta esphera e resultará:

$$m = \frac{4}{3}\pi\alpha^3.\rho;$$

portanto,

$$A = \frac{4}{3}\pi f\mu\rho.\alpha; \qquad (4)$$

isto é, que *na superficie de uma esphera homogenea um ponto material qualquer soffrerá uma acção proporcional á sua distancia ao centro da mesma esphera*. Este resultado subsiste ainda no caso em que o ponto acha-se no interior da esphera, isto é, no caso em que $\alpha < l$.

Si o ponto P estiver no exterior da superficie espherica, teremos: $\alpha > l$. N'este caso, a gravitação exercida sobre o ponto será inversamente proporcional ao quadrado de sua distancia ao centro da esphera. A medida d'esta força será dada pela fórmula (3), quando n'esta fórmula substituirmos M por

$$m = \frac{4}{3}\pi l^3.\rho.$$

Ella será, pois,

$$A = \frac{4}{3}\pi f\mu\rho\frac{l^3}{\alpha^2}. \qquad (5)$$

Fazendo $\alpha = o$ na expressão (4), teremos $A = o$. E na expressão (5) fazendo $\alpha = \infty$, resultará tambem $A = o$.

196. Consideremos, finalmente, duas espheras de massas M e M', cujos centros estejam situados a uma distancia qualquer d. A resultante da gravitação de M para uma qualquer das moleculas de M' é como si a massa M se condensasse no respectivo centro; a resultante da gravitação de M' para o centro de M é como si a massa M' se condensasse tambem no respectivo centro; logo, *as duas espheras*

homogeneas ou compostas de camadas homogeneas de densidades quaesquer gravitam constantemente uma para a outra, como si as suas massas fossem suppostas reunidas nos respectivos centros.

A medida d'esta mutua gravitação será:

$$A = \frac{fMM'}{d^2}.$$

Designando R e R' os raios d'estas duas espheras e chamando ρ e ρ' as respectivas densidades, teremos:

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3,$$

$$M' = \frac{4}{3}\pi\rho' R'^3;$$

portanto,

$$A = \frac{16}{9}\frac{f\pi^2\rho\rho' R^3R'^3}{d^2}.$$

197. Aqui termina a apreciação da parte verdadeiramente util e necessaria do difficil problema da composição geral das acções moleculares. Em mecanica celeste este estudo deverá ser proseguido.

CAPITULO III

EQUILIBRIO DE UM SYSTEMA INVARIAVEL

198. Como dissemos, um systema de pontos materiaes é chamado invariavel quando a sua fórma não muda seja qual fôr a sua posição no espaço.

Um solido natural é sempre sujeito a mudança de fórma devida á compressão exercida pela acção das forças que lhe são applicadas, ainda mesmo que as forças estejam em equilibrio. Mas desde que o solido dado haja conservado uma figura conveniente, poderemos considerar os pontos de applicação das forças como constituindo um systema de figura invariavel e então será a este estado que convirão as coordenadas d'esses differentes pontos, que serão suppostas conhecidas e que entrarão nas equações de equilibrio.

Sejam M', M'', M''', etc. os pontos dados de um solido e designemos por (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), etc., as suas coordenadas rectangulares em relação a tres eixos fixos. A invariabilidade de fórma do systema será convenientemente definida si forem constantes as distancias de um qualquer de seus pontos a todos os outros.

Cada uma d'estas distancias será dada pela raiz quadrada da somma dos quadrados das differenças entre as coordenadas respectivas de dois pontos quaesquer do systema. Si, pois, n designa o numero d'estes pontos, as equações de ligação do systema serão evidentemente $\frac{n(n-1)}{2}$.

Mas não é indispensavel que se conheça a distancia invariavel de cada um dos pontos do systema a todos os outros, para que se possa definir a invariabilidade da fórma do

mesmo systema. Será sufficiente que as distancias de cada um dos pontos do solido a tres d'entre elles, não em linha recta, e as distancias mutuas d'estes pontos sejam sempre constantes.

D'este modo, o numero de equações de ligação será composto das tres equações que dão a invariabilidade das distancias mutuas dos tres pontos arbitrariamente tomados e mais das $3\ (n-3)$ equações que definem as invariaveis distancias de cada um dos outros $(n-3)$ pontos do systema aos tres pontos arbitrarios. D'onde, designando por N o numero das equações de ligação, teremos:

$$N = 3 + 3\ (n-3) = 3\ n - 6.$$

199. Conhecidas as coordenadas constantes de cada ponto de um solido livre, não só ficará conhecida a sua figura como tambem o solido se achará em uma situação de equilibrio; d'onde cada ponto sendo fixado por suas tres coordenadas em relação aos eixos considerados, serão necessarias $3\ n$ equações para a determinação da figura e do equilibrio do solido; mas, como $3\ n-6$ equações são sufficientes para o conhecimento da figura do solido, é claro que, designando por N' o numero das equações proprias ao seu equilibrio, teremos:

$$N' = 3\ n - (3\ n - 6) = 6.$$

São, portanto, seis as condições geraes do equilibrio de um solido invariavel livre.

D'estas seis condições geraes, tres serão independentes das coordenadas dos differentes pontos do solido e dependentes sómente das componentes das forças applicadas aos mesmos pontos no sentido dos tres eixos considerados. Com effeito, si estas componentes acham-se em equilibrio sobre o solido, evidentemente se acharão ainda em equilibrio si forem todas transportadas para um ponto qualquer do solido, arbitrariamente tomado (143).

E, portanto, como a posição d'este ponto não modifica em nada o equilibrio das forças, é claro que as suas tres coordenadas não deverão entrar nas tres equações que exprimem o equilibrio das forças segundo os tres eixos coordenados; d'onde podemos prever que, das seis condições geraes do equilibrio, tres serão independentes das coordenadas e só dependerão das forças applicadas ao solido.

200. Conhecido o numero e a fórma das equações geraes do equibrio de um solido livre, confirmemos esta previsão geometrica procurando saber qual é o destino, isto é, a significação dynamica d'essas equações.

Qualquer que seja o methodo que tenha de nos fornecer as equações geraes da estatica, podemos prever que o solido só ficará em equilibrio quando forem annullados todos os movimentos que elle possa tomar sob a acção das forças que lhe forem applicadas, si não existirem relações segundo as quaes as forças se destruam. Dest'arte, qualquer das equações de equilibrio deverá significar que não póde effectuar-se um certo movimento que o solido poderia ter.

Ora, qualquer que seja o movimento que um solido invariavel e inteiramente livre possa ter no espaço, poderemos concebel-o como composto simultaneamente de um movimento de translação e de um movimento de rotação em torno de um qualquer de seus pontos. Estes dois movimentos, coexistentes nos casos normaes, poderão comtudo ter logar separadamente; assim, um solido poderá achar-se animado de um movimento de translação sem nenhuma rotação ou de uma rotação sem translação; mas não devemos apreciar casos particulares quando trata-se de uma questão geral como a de que nos occupamos.

Portanto, as equações geraes do equilibrio devem significar que não podem effectuar-se os movimentos de translação e rotação do solido livre; isto é, umas terão de significar que o solido não póde ter nenhum movimento de translação, outras terão de significar que não póde haver nenhuma rotação.

Reduzindo todas as forças applicadas ao solido a uma

resultante unica e a um conjugado resultante unico, decomponhamos esta resultante em tres componentes segundo os eixos coordenados e este conjugado em tres conjugados componentes situados nos tres planos coordenados. Evidentemente, sendo annulladas as acções das tres forças componentes e dos tres conjugados componentes, ficarão annullados os movimentos de translação e rotação do solido, quaesquer que sejam estes movimentos.

As equações que traduzem o impedimento das translações do solido segundo os eixos coordenados chamam-se equações do *equilibrio de translação*; e as que significam que não podem effectuar-se as rotações em torno dos mesmos eixos são chamadas do *equilibrio de rotação*.

201. *As equações do equilibrio de translação não devem conter as coordenadas dos pontos do solido e só dependem das forças e dos angulos que ellas fazem com os eixos coordenados.*— Com effeito, o movimento de translação d'um solido sendo sempre o mesmo para todos os seus pontos, o solido se moverá como si fosse um só ponto, sob a acção das forças.

D'onde o equilibrio de translação do solido será o mesmo que o equilibrio de um qualquer de seus pontos e, portanto, as equações só dependerão das componentes das forças segundo os eixos coordenados.

As equações do equilibrio de rotação dependem das forças segundo os eixos coordenados e tambem das coordenadas dos seus pontos de applicação. De facto, pois a rotação de um solido não é a mesma para todos os seus pontos. Ella varia com a posição de cada ponto, em relação ao respectivo eixo. Consequentemente, as equações do equilibrio de rotação dependerão das forças e das coordenadas dos seus pontos de applicação.

202. As considerações precedentes nos permittem uma ultima previsão, certamente muito importante, sobre as equações geraes do equilibrio de um solido invariavel. Ellas se reduzem a menor numero, todas as vezes que fizermos restricções sobre o systema de forças ou quando o solido fôr

sujeito a condições dadas. Evidentemente, em qualquer d'estes dois casos, tornam-se superfluas algumas das equações geraes do equilibrio, por serem naturalmente impossiveis alguns dos movimentos que estas equações annullam. Nós examinaremos estes casos particulares, depois que houvermos estabelecido as seis equações geraes do equilibrio de um solido inteiramente livre.

203. *Equilibrio de um systema de forças situadas em um plano.*— Sejam P', P'', P''', etc. differentes forças applicadas a um solido livre, mas existentes em um plano dado. Por um ponto qualquer A tomado n'este plano, tracemos dois eixos rectangulares fixos. Designemos por (α', β'), (α'', β''), (α''', β'''), etc. os angulos que, respectivamente, cada uma d'essas forças faz com os eixos coordenados.

Isto posto, decomponhamos parallelamente ás direcções d'estes eixos as differentes forças dadas e chamemos X e Y as duas resultantes parciaes das componentes parallelas aos mesmos eixos. Teremos:

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + etc. = \Sigma (P \cos \alpha),$$
$$Y = P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + etc. = \Sigma (P \cos \beta);$$

d'onde, como estas duas forças X e Y se combinarão em uma só força R dirigida segundo a diagonal do rectangulo feito sobre as suas direcções, resultará:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Para que o systema de forças dadas esteja em equilibrio sobre o solido será necessario que a sua resultante seja nulla; d'onde

$$R = o;$$

portanto,

$$X^2 + Y^2 = o;$$

ou

$$X = \Sigma (P \cos \alpha) = o,$$
$$Y = \Sigma (P \cos \beta) = o.$$

E como quando a diagonal de um rectangulo é nulla os seus lados adjacentes são iguaes e contrarios, as forças X e Y

serão iguaes e directamente oppostas. Mas a resultante poderia ser nulla sem que as forças se achassem em equilibrio, como aconteceria si em logar das resultantes parciaes X e Y tivessemos dois conjugados $(X_1, -X_1)$, $(Y_1, -Y_1)$. Elles dariam, pela sua composição, um conjugado resultante a que designaremos por $(S, -S)$. Portanto, não nos basta exprimir que a resultante R é nulla ; devemos exprimir tambem que as forças $(S, -S)$ não constituem um conjugado e são directamente oppostas. Seja, pois, $(S, -S)$ (fig. 85) o conjugado resultante da composição de todas as forças dadas. O seu momento $S.\ BC$ será igual á somma algebrica dos momentos de todas estas forças em relação a um ponto qualquer A, tomado para origem das coordenadas ; d'onde

$$S.\ B\ C = \Sigma\ (Pp),$$

servindo-nos da notação abreviada já empregada anteriormente.

Por ser

$$B\ C = A\ C - A\ B$$

a equação precedente será

$$S\ (A\ C - A\ B) = \Sigma\ (Pp).$$

Para que as forças S e $-S$ sejam directamente oppostas será evidentemente preciso que

$$A\ B = A\ C\ ;$$

portanto,

$$\Sigma\ (Pp) = o, \qquad (a)$$

será a condição necessaria para que as forças dadas se reduzam a duas forças iguaes e directamente oppostas.

204. Seja (fig. 86) P uma força qualquer. Designemos por (α, β) os angulos que a direcção d'esta força faz, respectivamente, com dois eixos rectangulares Ax e Ay em cujo plano

a força P acha-se situada. Seja M o seu ponto de applicação e designemos as coordenadas d'este ponto por (x, y). Pelos pontos A e Q tiremos as perpendiculares $AB = p$ e QN á direcção MC da força P.

Pelo ponto A tiremos $A\ E$ perpendicular a $Q\ N$.

Isto posto, teremos:

$$p = N\ E = Q\ N - Q\ E = y \cos \alpha - x \cos \beta.$$

Substituindo este valor na equação (a), virá :

$$\Sigma\ P\ (y \cos \alpha - x \cos \beta) = o.$$

205. São, pois, condições do equilibrio de um systema de forças situadas em um plano, as equações seguintes:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\ (P \cos \alpha) = o,\ \Sigma\ (P \cos \beta) = o, \\ \Sigma\ P\ (y \cos \alpha - x \cos \beta) = o. \end{array}\right\} \quad (b)$$

As duas primeiras traduzem-se assim: *a somma algebrica dos productos de cada força pelo coseno do angulo que ella faz respectivamente com dois eixos coordenados situados em seu plano é igual a zero.*

A terceira significa que *a somma algebrica dos momentos de todas as forças em relação á origem das coordenadas é igual a zero.*

Por ser

$$X = \Sigma\ (P \cos \alpha) \text{ e } Y = \Sigma\ (P \cos \beta),$$

podemos representar as equações precedentes por esta outra fórma :

$$X = 0,\ Y = 0,\ \Sigma\ (X\ y - Y\ x) = 0,$$

devida a Lagrange.

206. *Equilibrio de um systema de forças parallelas.*— Sejam P', P'', P''', etc., differentes forças parallelas e applicadas a um solido invariavel livre. Por um ponto A, qualquer (fig. 87), tracemos tres eixos rectangulares fixos no

espaço. Supponhamos que o eixo Az seja parallelo á direcção commum das forças dadas. Designando R a resultante do systema, teremos :

$$R = P' + P'' + P''' + etc. = \Sigma (P).$$

Para que estas forças estejam em equilibrio é necessario que a força P', por exemplo, seja igual e directamente opposta á resultante de todas as outras forças dadas. Chamando, pois, R' a resultante das forças P'', P''', $P^{\prime v}$, etc., ella será dada pela equação seguinte:

$$R' = P'' + P''' + P^{\prime v} + etc.$$

Pois que as forças P' e R' devem ser iguaes e contrarias; teremos :

$$P' + R' = 0 ;$$

d'onde, substituindo R' por seu valor, resultará:

$$P' + P'' + P''' + P^{\prime v} + etc = 0;$$

portanto,

$$R = \Sigma (P) = 0,$$

será a nossa primeira condição de equilibrio. Esta condição não sendo sufficiente, porque ella podia ter logar sem que as forças P' e R' fossem directamente oppostas, precisamos exprimir que estas forças não são parallelas. Sejam, pois, (x_1, y_1, z_1) as tres coordenadas do centro das forças parallelas P'', P''', $P^{\prime v}$, etc.

Teremos, designando por (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), etc., as respectivas coordenadas dos pontos de applicação d'estas forças, as equações seguintes:

$$R' x_1 = P'' x'' + P''' x''' + P^{\prime v} x^{\prime v} + etc.$$
$$R' y_1 = P'' y'' + P''' y''' + P^{\prime v} y^{\prime v} + etc.$$
$$R' z_1 = P'' z'' + P''' z''' + P^{\prime v} z^{\prime v} + etc.$$

Para que as forças R' e P' sejam directamente oppostas, basta que se achem sobre uma mesma parallela $M'M_1$ ao

eixo dos z. N'este caso, as coordenadas (x_1, y_1, z_1) do centro das forças parallelas e (x', y', z') da força P' devem coincidir; portanto,

$$x_1 = x', \; y_1 = y', \; z_1 = z';$$

d'onde, por ser

$$R' = -P',$$

as equações precedentes se mudarão nas seguintes:

$$0 = P' x' + P'' x'' + P''' x''' + P^{\text{v}} x'^{\text{v}} + etc = \Sigma (P x),$$
$$0 = P' y' + P'' y'' + P''' y''' + P^{\text{v}} y'^{\text{v}} + etc = \Sigma (P y),$$
$$0 = P' z' + P'' z'' + P''' z''' + P^{\text{v}} z'^{\text{v}} + etc = \Sigma (P z).$$

Si agora mudarmos o ponto $M' (x', y', z')$ de applicação das forças R' e P' para o ponto M_1 do plano dos xy, bem como os pontos de applicação das forças P'', P''', P'^{v}, etc., a ultima d'estas equações não terá mais logar por ser n'este plano:

$$z' = z'' = z''' = z'^{\text{v}} = etc. = 0;$$

d'onde as duas equações precedentes,

$$\Sigma (Px) = 0, \; \Sigma (Py) = 0,$$

serão as condições necessarias para que as forças applicadas ao solido se reduzam a duas forças iguaes e directamente oppostas.

207. São, pois, condições do equilibrio de um systema de forças parallelas as tres equações seguintes:

$$\Sigma (P) = 0, \; \Sigma (Px) = 0, \; \Sigma (P y) = 0. \qquad (c)$$

A primeira significa que, *no estado de equilibrio das forças parallelas, a somma algebrica das forças é sempre nulla.*

As duas ultimas traduzem que, *no estado de equilibrio das forças parallelas, a somma algebrica dos momentos de*

todas as forças tomadas separadamente em relação a dois planos differentes e parallelos á direcção commum das forças é sempre nulla.

208. *Equilibrio de um systema qualquer de forças.*— Sejam P', P'', P''', etc., differentes forças applicadas a um solido invariavel livre e situadas de uma maneira qualquer no espaço. Sejam $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, $(\alpha''', \beta''', \gamma''')$, etc. os angulos que cada uma d'estas forças faz, respectivamente, com tres eixos rectangulares fixos e situados em planos differentes.

Consideremos em primeiro logar a força P' applicada ao ponto M' (fig. 88), e mudemos este ponto de applicação para o ponto M_1 de sua direcção e situado no plano dos xy. N'este ponto M_1 decomponhamos a força P' em duas outras $M_1 Q'$ e $M_1 F'$: a primeira situada no plano dos xy e a segunda parallela ao eixo dos z. A componente $M_1 F'$ será evidentemente igual a $P' \cos \gamma'$, pois é parallela á componente de P' segundo a direcção Az.

Procedendo de um modo analogo para com todas as outras forças do systema dado, chegaremos a decompôl-as em dois grupos de forças : umas, situadas no plano dos xy ; outras, perpendiculares a este plano ou parallelas ao eixo dos z.

Para que haja equilibrio, será evidentemente necessario que estes dois systemas parciaes de forças estejam separadamente em equilibrio. E como as equações do equilibrio das forças situadas no plano dos xy são:

$$\Sigma (P \cos \alpha) = 0, \ \Sigma (P \cos \beta) = 0, \ \Sigma P (y \cos \alpha - x \cos \beta) = 0 \ ; \quad (A)$$

e as equações do equilibrio das forças parallelas ao eixo dos z são :

$$\Sigma (P) = 0, \ \Sigma (P x) = 0, \ \Sigma (P y) = 0 \ ;$$

ou, mudando n'estas tres ultimas equações a força P pela componente $P \cos \gamma$, parallela ao eixo dos z,

$$\Sigma (P \cos \gamma) = 0, \ \Sigma (P \cos \gamma \ . \ x) = 0, \ \Sigma (P \cos \gamma \ . \ y) = 0 : \quad (B)$$

as equações *(A)* e *(B)* encerrarão a solução geral do problema. Mas, com alguma alteração, porque os pontos de applicação das forças dadas foram todos mudados para o plano dos xy. Resta-nos, pois, determinar as expressões das coordenadas dos pontos em que as direcções das forças dadas encontram o plano dos xy, em funcção das coordenadas dos pontos em que estas forças foram applicadas ao solido.

209. Sejam, em coordenadas rectangulas,

$$\left.\begin{aligned} z - z' &= \frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}(x - x'), \\ z - z' &= \frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'}(y - y'), \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

as equações da recta que representa a força $M'P'$, obrigada a passar pelo ponto M', cujas coordenadas designamos por (x', y', z').

Determinemos as coordenadas do ponto M_1, em que a força $M'P'$ encontra o plano dos xy. N'este ponto, a ordenada z será nulla; e, si (x_1, y_1) nos designam as outras coordenadas, teremos:

$$z = 0,\ x = x_1,\ y = y_1;$$

d'onde as equações *(C)* se mudarão nas seguintes:

$$-z' = \frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}(x_1 - x'),$$

$$-z' = \frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'}(y_1 - y');$$

d'onde

$$x_1 = x' - \frac{z'\cos\alpha'}{\cos\gamma'},$$

$$y_1 = y' - \frac{z'\cos\beta'}{\cos\gamma'}.$$

Estas são as expressões dos valores das coordenadas do ponto M_1, em que a força $M'P'$ encontra o plano dos xy.

Si agora considerarmos a força $M'' P''$ obrigada a passar pelo ponto $M'' (x'', y'', z'')$, as coordenadas do ponto M_2, em que a direcção d'esta força encontra o plano dos xy, serão :

$$x'' - \frac{z'' \cos \alpha''}{\cos \gamma''}, \quad y'' - \frac{z'' \cos \beta''}{\cos \gamma''};$$

portanto, considerando uma força qualquer P, fazendo com os tres eixos rectangulares os angulos (α, β, γ) e applicada a um ponto $M (x, y, z)$, as coordenadas do ponto em que a sua direcção encontra o plano dos xy serão:

$$x - \frac{z \cos \alpha}{\cos \gamma}, \quad y - \frac{z \cos \beta}{\cos \gamma}.$$

Substituindo, pois, em logar de x e y nas equações (A) e (B) estas differenças, teremos :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma (P \cos \alpha) = 0, \ \Sigma (P \cos \beta) = 0, \ \Sigma (P \cos \gamma) = 0. \\ \Sigma P (y \cos \alpha - x \cos \beta) = 0, \ \Sigma P (x \cos \gamma - z \cos \alpha) = 0, \\ \qquad \Sigma P (z \cos \beta - y \cos \gamma) = 0. \end{array}\right\} (D)$$

Taes são as seis equações geraes do equilibrio d'um solido invariavel, inteiramente livre, sob a acção d'um systema qualquer de forças. As tres primeiras, attribuidas a Varignon, são as do equilibrio de translação ; as tres ultimas, devidas a D'Alembert, são as do equilibrio de rotação.

210. Usando da notação de Lagrange, estas equações serão representadas d'este modo :

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma X = o, \ \Sigma Y = o, \ \Sigma Z = o, \\ \Sigma (Xy - Yx) = o, \ \Sigma (Zx - Xz) = o, \ \Sigma (Yz - Zy) = o, \end{array}\right\} (E)$$

designando por X, Y, Z, as componentes d'uma força qualquer segundo os eixos coordenados.

211. Para enunciarmos com simplicidade as equações do equilibrio d'um solido livre, procuremos dar uma nova fórma ás tres ultimas equações (D).

Considerando no plano dos xy a componente $M_1\ Q'$ da força P' (fig. 88), teremos:

$$M_1\ Q' = P' \ sen\ \gamma'.$$

Seja p' a perpendicular tirada da origem A á direcção d'esta força. O seu momento em relação á origem será:

$$P' \ sen\ \gamma' . \ p';$$

mas esta força

$$P' \ sen\ \gamma'$$

foi designada simplesmente por P' quando estabelecemos as condições do equilibrio das forças situadas n'um plano; portanto,

$$P' \ sen\ \gamma' . \ p' = P' . \ p';$$

d'onde, tendo em vista que este resultado seria obtido com qualquer outra força P'', P''', etc., teremos:

$$\Sigma\ (P\ sen\ \gamma .\ p) = \Sigma\ (Pp)\ ;$$

d'onde, por causa da expressão do valor da perpendicular p, dada precedentemente (204), teremos:

$$\Sigma\ (P\ sen\ \gamma .\ p) = \Sigma P\ (y \cos \alpha - x \cos \beta)\ ;$$

portanto, a equação

$$\Sigma P\ (y \cos \alpha - x \cos \beta) = o$$

tomará a fórma seguinte:

$$\Sigma\ (P\ sen\ \gamma .\ p) = o.$$

Analogamente as outras duas equações do equilibrio de rotação

$$\Sigma P\ (x \cos \gamma - z \cos \alpha) = o,\ \Sigma P\ (z \cos \beta - y \cos \gamma) = o,$$

serão transformadas nas equações

$$\Sigma\ (P\ sen\ \beta .\ q) = o,\ \Sigma\ (P\ sen\ \alpha .\ r) = o,$$

q e r designando as perpendiculares tiradas da origem A, nos planos dos $x\ z$ e dos $y\ z$, ás forças

$$P\ sen\ \beta \text{ e } P\ sen\ \alpha.$$

As forças

$$P\ sen\ \gamma,\ P\ sen\ \beta,\ P\ sen\ \alpha,$$

são evidentemente as projecções da força P respectivamente sobre os planos dos $x\ y$, $x\ z$, $y\ z$, d'onde os primeiros membros das equações

$$\Sigma\ (P\ sen\ \gamma .\ p) = o,\ \Sigma\ (P\ sen\ \beta .\ q) = o,\ \Sigma\ (P\ sen\ \alpha .\ r) = o,$$

designam as sommas dos momentos das projecções das forças dadas, sobre planos respectivamente perpendiculares aos eixos dos z, dos y e dos x, tomados todos em relação á origem A, que é o ponto de intersecção d'estes eixos com os referidos planos; isto é, designam as sommas dos momentos das forças dadas em relação aos eixos coordenados (127).

Agora, podemos uniformemente traduzir em linguagem vulgar as seis equações geraes (D) do equilibrio d'um solido invariavel livre.

Ellas significam que *deve ser nulla a somma algebrica das forças segundo cada um dos tres eixos coordenados, bem como a somma algebrica dos momentos correspondentes.*

212. *Casos particulares.* — Quando o systema de forças é sujeito a restricções dadas ou quando o solido invariavel é sujeito a certas condições, as seis equações (E) reduzem-se a menor numero.

1º *caso. As forças são parallelas ao plano dos xy.* N'este caso, é superflua a equação $Z = o$, porque o solido não poderá ter a translação segundo o eixo dos z. D'onde as equações serão:

$$\Sigma X = o,\ \Sigma Y = o,\ \Sigma\ (Xy - Yx) = o,\ \Sigma\ (Zx - Xz) = o,$$
$$\Sigma\ (Yz - Zy) = o.$$

2º *caso. As forças são situadas no plano dos xy.* Conforme já ficou estabelecido, as equações são:

$$\Sigma X = o, \ \Sigma Y = o, \ \Sigma (Xy - Yx) = o.$$

3º *caso. As forças são parallelas ao eixo dos z.* Conforme já ficou tambem estabelecido, as equações são:

$$\Sigma Z = o, \ \Sigma (Zx - Xz) = o, \ \Sigma (Yz - Zy) = o.$$

4º *caso. As forças são situadas no plano dos xy e parallelas ao eixo dos x.* As equações serão:

$$\Sigma X = o, \ (Xy - Yx) = o.$$

5º *caso. As forças acham-se situadas no eixo dos z.* A equação

$$\Sigma Z = o$$

será sufficiente.

6º *caso. As forças passam pela origem das coordenadas.* N'este caso,

$$x = o, \ y = o, \ z = o,$$

verificam as equações do equilibrio de rotação; portanto, as equações necessarias serão:

$$\Sigma X = o, \ \Sigma Y = o, \ \Sigma Z = o.$$

7º *caso. As forças tomadas duas a duas formam um systema de conjugados.* N'este caso, o conjugado resultante não poderá permittir nenhuma translação; portanto, deverão ser annulladas as rotações em torno dos tres eixos coordenados. As equações serão:

$$\Sigma (Xy - Yx) = o, \ \Sigma (Zx - Xz) = o, \ \Sigma (Yz - Zy) = o.$$

213. Passemos agora a considerar o solido invariavel sujeito a certas condições dadas.

Equilibrio d'um solido que tem um ponto fixo.— Supponhamos que a origem A das coordenadas seja o ponto fixo dado. As componentes (X, Y, Z) d'uma força qualquer applicada ao solido podem ser todas transportadas para este ponto,

cada uma com o auxilio d'um conjugado. E como a resultante R d'este systema de forças é destruida pela fixidez do ponto, o solido só poderá mover-se pela acção dos conjugados auxiliares. Para que haja equilibrio, será, pois, necessario e sufficiente que a somma algebrica dos tres momentos das forças dadas em relação aos eixos coordenados seja nulla; d'onde,

$$\Sigma (Xy - Yx) = o, \ \Sigma (Zx - Xz) = o, \ \Sigma (Yz - Zy) = o,$$

serão as equações do equilibrio d'um solido que tem um ponto fixo, em torno do qual elle póde gyrar livremente em todos os sentidos.

214. A pressão exercida sobre o ponto fixo pelas forças para elle transportadas dará logar a uma reacção d'este ponto sobre o solido.

Seja R_1 esta resistencia. Então, o solido ficará como si fosse livre e em equilibrio sob a acção das forças R e R_1. Si (X_1, Y_1, Z_1) designam as componentes d'esta força R_1, teremos, pois, as equações seguintes :

$$X_1 + \Sigma X = o,$$
$$Y_1 + \Sigma Y = o,$$
$$Z_1 + \Sigma Z = o,$$

que nos permittirão calcular a resistencia R_1 do ponto fixo ou a pressão $-R_1$ n'elle exercida pela resultante R das forças ΣX, ΣY, ΣZ. A expressão do seu valor será :

$$R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}.$$

Para calcularmos a direcção d'esta força teremos :

$$X_1 = R_1 \cos a,$$
$$Y_1 = R_1 \cos b,$$
$$Z_1 = R_1 \cos c,$$

(a, b, c) designando os angulos que a direcção de R_1 faz com os eixos rectangulares; d'onde

$$\cos a = -\frac{\Sigma X}{R_1}, \quad \cos b = -\frac{\Sigma Y}{R_1}, \quad \cos c = -\frac{\Sigma Z}{R_1}.$$

A força R_1 encontrando os tres eixos coordenados, os seus momentos em relação a estes eixos serão nullos, d'onde as componentes da força R_1 não entrarão nas equações do equilibrio de rotação do solido.

215. *Equilibrio de um solido que tem dois pontos fixos.*— Supponhamos (fig. 89) que a origem A das coordenadas coincida com um dos pontos fixos do solido e seja B o outro ponto fixo. Tomemos a recta AB para eixo dos z e sejam Ax, Ay e Az tres eixos rectangulares.

As componentes (X, Y, Z) de uma força qualquer applicada ao solido podem ser todas transportadas para o ponto A, cada uma com o auxilio de um conjugado. E como a resultante R d'este systema de forças é destruida pela fixidez do ponto, o solido sómente ficará sujeito á acção dos conjugados auxiliares. Estes conjugados se acharão situados nos tres planos coordenados e se reduzirão a tres unicos conjugados cujos momentos serão :

$$\Sigma\,(Yz - Zy),\quad \Sigma\,(Zx - Xz),\quad \Sigma\,(Xy - Yx).$$

Os dois primeiros, situados nos planos dos zy e xz, serão destruidos pela resistencia do eixo dos z, porque podemos fazer gyrar cada um d'estes conjugados até que as forças que o constituem sejam perpendiculares ao mesmo eixo e sejam, portanto, destruidas. Assim, só teremos o conjugado situado no plano dos xy, que produzirá a rotação do solido em torno do eixo fixo, d'onde a unica condição de equilibrio será :

$$\Sigma\,(Xy - Yx) = o.$$

216. Mas, si além d'esta rotação o solido tem a liberdade de escorregar ao longo do eixo dos z, precisaremos tambem impedir este movimento de translação ; portanto, n'este caso, as condições do equilibrio serão :

$$\Sigma\,(Z) = o,\ \Sigma\,(Xy - Yx) = o.$$

217. Consideremos agora as resistencias que offerecem os pontos fixos. Designemos por (X_1, Y_1, Z_1) as tres componentes no sentido do eixo dos x, dos y e dos z da resistencia R_1 do ponto A; e por (X_2, Y_2, Z_2) as tres componentes da resistencia R_2 exercida sobre o solido pela fixidez do ponto B. Seja $AB = h$.

Isto posto, o solido ficará em equilibrio e como si fosse inteiramente livre, si considerarmos, além das forças applicadas em seus differentes pontos, as componentes das resistencias R_1 e R_2. Para estabelecermos as seis equações do equilibrio assim considerado, avaliemos primeiro os momentos das forças R_1 e R_2 em relação aos tres eixos coordenados.

Os momentos das forças (X_1, Y_1, Z_1) componentes de R_1 serão nullos, porque estas componentes encontram no ponto A os tres eixos coordenados. Quanto ás componentes da força R_2, vemos que, em relação ao eixo dos z, todos os momentos serão nullos.

Em relação ao eixo dos x, o momento da força Z_2 é nullo, porque esta força podia ser mudada para o ponto A de sua direcção e n'este ponto encontraria o eixo Ax; o momento da força X_2 é nullo porque a sua projecção sobre o plano dos yz é nulla; portanto, só restará a força Y_2 cujo momento será Y_2h. Em relação ao eixo dos y, o momento da força Z_2 é nullo porque a direcção d'esta força encontra o eixo Ay; o momento da força Y_2 é nullo porque a sua projecção sobre o plano dos xz é nulla; d'onde só restará a força X_2 cujo momento será $-X_2h$.

Assim, as equações do equilibrio serão:

$$X_1 + X_2 + \Sigma X = o,$$
$$Y_1 + Y_2 + \Sigma Y = o,$$
$$Z_1 + Z_2 + \Sigma Z = o,$$
$$\Sigma (Yz - Zy) + Y_2 h = o,$$
$$\Sigma (Zx - Xz) - X_2 h = o,$$
$$\Sigma (Xy - Yx) = o.$$

Esta ultima equação é a unica condição estabelecida

sómente entre as forças dadas, sem a consideração da resistencia dos pontos fixos.

As outras cinco equações dão-nos:

$$Z_1 + Z_2 = - \Sigma Z,$$

$$X_2 = \frac{\Sigma (Zx - Xz)}{h},\ Y_2 = - \frac{\Sigma (Yz - Zy)}{h}.$$

$$X_1 = - \Sigma X - \frac{\Sigma (Zx - Xz)}{h},\ Y_1 = - \Sigma Y + \frac{\Sigma (Yz - Zy)}{h}.$$

Assim, os valores de X_1, Y_1, X_2 e Y_2 serão determinados; mas não poderão ser os de Z_1 e Z_2, pois que só conhecemos a somma d'estas duas forças, dirigidas no sentido da linha que une os dois pontos fixos.

Vemos claramente a razão d'isto, attendendo a que as duas forças Z_1 e Z_2 poderão ser mudadas para o ponto A, ou poderão ser repartidas pelos pontos A e B em duas partes quaesquer.

218. Si as forças applicadas ao solido são situadas em planos perpendiculares ao eixo dos z, as componentes parallelas a este eixo serão todas nullas; d'onde as equações precedentes se transformarão nas seguintes:

$$Z_1 + Z_2 = o,$$

$$X_2 = - \frac{\Sigma (Xz)}{h},\ Y_2 = - \frac{\Sigma (Yz)}{h},$$

$$X_1 = - \Sigma X + \frac{\Sigma (Xz)}{h} = \frac{\Sigma X (z - h)}{h},$$

$$Y_1 = - \Sigma Y + \frac{\Sigma (Yz)}{h} = \frac{\Sigma Y (z - h)}{h}.$$

A primeira nos indica que não existe mais resistencia no sentido do eixo fixo.

As outras nos mostram que as resistencias dirigidas perpendicularmente ao eixo dos z são as mesmas que teriam logar si as forças, situadas nos respectivos planos,

fossem transportadas parallelamente ás suas direcções e applicadas ao mesmo eixo.

219. As seis condições geraes do equilibrio d'um solido invariavel são todas superfluas quando o solido possue tres ou mais pontos fixos, não em linha recta, quaesquer que sejam as forças applicadas ao mesmo solido.

As pressões exercidas nos differentes pontos fixos serão em geral indeterminadas.

220. *Equilibrio de um solido sobre um plano fixo.*— Supponhamos (fig. 90) que um solido invariavel seja sujeito a escorregar sobre uma superficie plana que não exerça attrito sobre o solido.

As reacções Z_1, Z_2, Z_3, etc. dos diversos pontos de contacto do solido sendo todas normaes ao plano, serão parallelas entre si.

Tomemos para representar este plano o dos xy e sejam M_1, M_2, M_3, etc. os pontos de contacto.

Sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), etc. as coordenadas rectangulares d'estes pontos.

Designemos por ΣX, ΣY, ΣZ as sommas das componentes das forças dadas, parallelas aos tres eixos coordenados; e por $\Sigma (Xy - Yx)$, $\Sigma (Zx - Xz)$, $(Yz - Zy)$ as sommas dos momentos em relação aos eixos dos z, dos y e dos x.

Teremos as equações seguintes :

$$\Sigma X = o, \; \Sigma Y = o, \; \Sigma (Xy - Yx) = o; \qquad (F)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma Z + Z_1 + Z_2 + Z_3 + etc. = 0, \\ \Sigma (Zx - Xz) + Z_1 x_1 + Z_2 x_2 + Z_3 x_3 + etc. = 0, \\ \Sigma (Yz - Zy) - Z_1 y_1 - Z_2 y_2 - Z_3 y_3 - etc. = 0. \end{array}\right\} \qquad (G)$$

As tres primeiras são, em todos os casos, as condições geraes do equilibrio das forças dadas. As tres ultimas são as condições do equilibrio das forças dadas e das reacções incognitas. Para determinar estas reacções, distinguiremos os casos :

1.º *Ha um unico ponto de contacto.* N'este caso,

$$Z_2 = 0, \; Z_3 = 0, \; etc.;$$

d'onde as tres ultimas equações se reduzirão simplesmente ás seguintes:

$$\Sigma Z + Z_1 = 0,$$

$$\Sigma (Zx - Xz) + Z_1 x_1 = 0,$$

$$\Sigma (Yz - Zy) - Z_1 y_1 = 0;$$

d'onde as expressões

$$Z = -\Sigma Z,$$

$$x_1 = \frac{\Sigma (Zx - Xz)}{\Sigma Z}, \; y = -\frac{\Sigma (Yz - Zy)}{\Sigma Z},$$

determinarão completamente a resistencia Z_1. Si tomarmos para ponto de apoio a origem A das coordenadas, teremos $x_1 = 0$ e $y_1 = 0$; portanto, resultarão mais as duas equações de equilibrio seguintes:

$$\Sigma (Zx - Xz) = 0, \quad \Sigma (Yz - Zy) - 0,$$

que deverão ser reunidas ás equações (F).

2.º *Ha dois pontos unicos de contacto*. N'este caso, sejam M_1 e M_2 estes dois pontos. As equações serão:

$$\Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$\Sigma (Zx - Xz) + Z_1 x_1 + Z_2 x_2 = 0,$$

$$\Sigma (Yz - Zy) - Zy_1 - Z_2 y_2 = 0.$$

Tomando os pontos M_1 e M_2 no eixo dos x, teremos:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0;$$

d'onde resultará mais a quarta equação de equilibrio:

$$\Sigma (Yz - Zy) = 0.$$

As outras duas equações nos determinarão os valores de Z_1 e Z_2; mas os seus pontos de applicação não poderão ser

determinados. Si tomarmos o ponto M_2 na origem das coordenadas, teremos $x_2 = 0$; d'onde as equações

$$\Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$\Sigma (Zx - Xz) + Z_1 x_1 = 0,$$

ainda serão insufficientes para determinar Z_1, Z_2 e x_1.

3.º *Ha tres pontos unicos de contacto.* Sejam M_1, M_2 e M_3 estes tres pontos. As equações serão

$$\Sigma Z + Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0,$$

$$\Sigma (Zx - Xx) + Z_1 x_1 + Z_2 x_2 + Z_3 x_3 = 0,$$

$$\Sigma (Yz - Zy) - Z_1 y_1 - Z_2 y_2 - Z_3 y_3 = 0.$$

Ellas farão conhecer z_1, z_2, z_3; mas, si os pontos estão em linha recta, no eixo dos x, por exemplo, o problema será indeterminado e teremos mais uma quarta equação de equilibrio que deverá ser reunida ás equações *(F)*. Em quaesquer situações que se achem os pontos de apoio, não poderemos determinal-os com as equações precedentes.

4.º Finalmente, si existem mais de tres pontos de apoio e si não estão em linha recta, as tres equações *(G)* serão insufficientes para determinar as resistencias dos differentes pontos e não haverá mais nenhuma equação de equilibrio. Si, porém, os pontos se acham em linha recta, no eixo dos x, supponhamos, haverá mais a quarta equação

$$\Sigma (Yz - Zy) = 0,$$

que deverá ser reunida ás tres equações *(F)*; mas ainda maior será a indeterminação das reacções incognitas do plano dado.

221. *Equilibrio d'um solido sobre uma superficie fixa.* — Tendo em vista o caso precedente, podemos fazer uma apreciação sobre as condições do equilibrio d'um solido, que, sob a acção d'um systema qualquer de forças, apoia-se por um ou mais pontos sobre uma superficie fixa qualquer.

Si o solido invariavel tem um unico ponto de apoio sobre uma superficie dada, este ponto não poderá deslocar-se no sentido da normal á superficie e sómente poderá mover-se em uma direcção qualquer perpendicular á mesma normal. Mas o solido poderá tambem gyrar em torno d'uma linha qualquer passando pelo ponto de apoio. Assim, as condições do equilibrio do solido são: 1º, *que as forças applicadas ao solido possam reduzir-se a uma resultante unica;* 2º, *que a direcção d'esta resultante coincida com a da normal á superficie no ponto de apoio;* 3º, *que o sentido da acção da resultante seja para apoiar o solido contra a superficie e não para afastal-o.*

222. Supponhamos agora que o solido tenha dois pontos de apoio contra a superficie dada. As forças applicadas ao solido podendo em geral reduzir-se a duas forças (144), o equilibrio terá logar si pudermos fazer coincidir as direcções d'estas duas forças com as duas normaes á superficie nos dois pontos de apoio. Si, porém, as forças dadas se reduzem a uma resultante unica, será necessario que as duas normaes estejam em um mesmo plano com esta resultante e concorram em um ponto da direcção d'esta força. Será ainda preciso que o sentido das forças seja para apoiar o solido contra a superficie e não para afastal-o.

Supponhamos, finalmente, que o solido tenha tres pontos de apoio contra a superficie dada. N'este caso, a resistencia da superficie será equivalente a tres forças dirigidas segundo as normaes aos pontos de apoio, ás quaes podemos attribuir valores convenientes, determinado o sentido em que actuam. Si pudermos formar com estas tres forças um systema que annulle o systema das forças applicadas ao solido, o equilibrio terá logar. Portanto, quando estas ultimas forças se reduzirem a uma resultante unica, o equilibrio subsistirá quando as tres normaes á superficie concorrerem em um ponto da direcção d'esta resultante; ou quando as tres normaes sendo parallelas entre si e á direcção da resultante, estas quatro linhas se acharem em um mesmo plano e a direcção da resultante fôr comprehendida no intervallo das normaes consideradas.

223. *Resultante d'um systema qualquer de forças.* — Quando as forças applicadas a um solido livre não se acham em equilibrio, poderá acontecer que ellas se reduzam a uma só; procuremos, pois, determinar esta resultante.

Para isto, seja a força — R capaz de destruir a acção de todas as forças consideradas; portanto, R será a resultante procurada.

Ora, si a força — R destróe a acção das forças P', P'', P''', etc. que agem sobre o solido dado, as seis equações geraes do equilibrio devem ter necessariamente logar quando entre as forças que são consideradas n'estas equações achar-se tambem a força — R.

Designemos por (a, b, c) os angulos que a direcção d'esta força faz com tres eixos rectangulares fixos.

Sejam, por abreviação,

$$X = P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.}$$
$$Y = P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + \text{etc.}$$
$$Z = P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \text{etc.}$$

As componentes da força R sendo, pois, X, Y, Z, teremos :

$$X = R \cos a, \quad Y = R \cos b, \quad Z = R \cos c, \qquad (H)$$

d'onde

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

será a expressão da intensidade da resultante procurada. Quanto á sua direcção, as fórmulas precedentes dão-nos :

$$\cos a = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos b = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos c = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Sejam (x_1, y_1, z_1) as tres coordenadas rectangulas d'um ponto qualquer da direcção da resultante procurada ; e, tendo

em vista as equações geraes do equilibrio de rotação do solido, façamos:

$$P' (y' \cos \alpha' - x' \cos \beta') + P'' (y'' \cos \alpha'' - x'' \cos \beta'') + \\ + P''' (y''' \cos \alpha''' - x''' \cos \beta''') + \text{etc.} = L,$$

$$P' (x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha') + P'' (x'' \cos \gamma'' - z'' \cos \alpha'') + \\ + P''' (x''' \cos \gamma''' - z''' \cos \alpha''') + \text{etc.} = M,$$

$$P' (z' \cos \beta' - y' \cos \gamma') + P'' (z'' \cos \beta'' - y'' \cos \gamma'') + \\ + P''' (z''' \cos \beta''' - y''' \cos \gamma''') + \text{etc.} = N.$$

Portanto, teremos:

$$L - R (y_1 \cos a - x_1 \cos b) = o,$$

$$M - R (x_1 \cos c - z_1 \cos a) = o,$$

$$N - R (z_1 \cos b - y_1 \cos c) = o ;$$

d'onde, por causa das fórmulas *(H)*, virá:

$$\left.\begin{aligned} L - X y_1 + Y x_1 = o, \\ M - Z x_1 + X z_1 = o, \\ N - Y z_1 + Z y_1 = o. \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Si considerarmos que (x_1, y_1, z_1) sejam as coordenadas do ponto de applicação da resultante, vemos que a sua determinação não será possivel, porque estas coordenadas pertencem a um ponto qualquer da direcção d'esta força. De facto, examinando as equações precedentes, nota-se que o systema d'estas equações não é determinado, por não serem distinctas as equações que o constituem.

Ellas devendo representar, em coordenadas rectilineas, uma linha recta, formarão apenas um systema de duas equações distinctas. Eliminando, pois, da primeira d'essas equações *(I)* as variaveis (x_1, y_1), pela substituição dos seus valores dados respectivamente pelas duas ultimas equações, que são as da resultante, teremos a relação

$$Z L + Y M + X N = o, \qquad (K)$$

que constituirá a *condição necessaria*, para que um systema de forças se reduza a uma resultante unica.

224. Quando a equação precedente tiver logar, poderemos determinar o ponto de applicação da resultante, por meio de suas duas equações

$$\left.\begin{aligned} M - Z x_1 + X z_1 = o, \\ N - Y z_1 + Z y_1 = o. \end{aligned}\right\} \quad (Q)$$

Com effeito, porque tendo sido decompostas todas as forças applicadas ao solido em dois grupos unicos, de forças situadas no plano dos $z\ y$ e de forças parallelas ao eixo dos z, é claro que, si ellas admittem uma resultante unica, necessariamente o seu ponto de applicação estará situado no plano dos xy. Fazendo, pois, nas equações (Q),

$$z_1 = o,$$

teremos:

$$x_1 = \frac{M}{Z}, \quad y_1 = - \frac{N}{Z};$$

isto é, *as distancias respectivas do ponto de applicação da resultante unica d'um systema qualquer de forças, a dois eixos rectangulares, são iguaes ás sommas dos momentos das forças em relação aos mesmos eixos, divididas pela somma das forças avaliadas segundo o terceiro eixo.*

225. Si tivermos simultaneamente

$$X = o, Y = o, Z = o,$$

a equação (K) será verificada ; mas, n'este caso,

$$x_1 = \infty, y_1 = - \infty;$$

ou a resultante não será mais uma força e será um systema de duas forças iguaes, parallelas e dirigidas em sentidos contrarios, isto é, será um conjugado de forças.

Si tivermos simultaneamente

$$L = o, M = o, N = o,$$

ainda a equação (K) terá logar; mas, n'este caso,

$$x_1 = o \; , \; y_1 = o \; ;$$

ou a resultante R passará pela origem das coordenadas.

226. Para que fique bem clara a significação mecanica da equação de condição

$$Z\,L + Y\,M + X\,N = o$$

procuremos interpretal-a pela theoria dos conjugados.

Vimos (143) que um systema qualquer de forças applicadas a um solido invariavel livre póde, em geral, reduzir-se a uma resultante unica e a um conjugado unico.

Sejam (fig. 91), pois, para a origem A das coordenadas, transportadas todas as forças applicadas ao solido.

A resultante AR, como estabelecemos (223), terá para componentes segundo os eixos as forças (X, Y, Z); d'onde

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos a = \frac{X}{R}, \; \cos b = \frac{Y}{R}, \; \cos c = \frac{Z}{R} \; .$$

Isto posto, designemos por G o momento do conjugado resultante e por (λ, μ, ν) os angulos que uma perpendicular AC ao plano d'este conjugado faz, respectivamente, com os tres eixos rectangulares Az, Ay, Ax.

Evidentemente, esta perpendicular AC sendo de grandeza proporcional ao momento G, representará o conjugado resultante e será o eixo d'este conjugado.

Decompondo este conjugado segundo os tres planos coordenados, teremos tres conjugados, cujos momentos serão:

$$\Sigma\, P\, (y \cos \alpha - x \cos \beta),$$

$$\Sigma\, P\, (x \cos \gamma - z \cos \alpha),$$

$$\Sigma\, P\, (z \cos \beta - y \cos \gamma);$$

ou, empregando as notações precedentes, serão L, M, N, porque:

$$L = \Sigma P (y \cos \alpha - x \cos \beta),$$

$$M = \Sigma P (x \cos \gamma - z \cos \alpha),$$

$$N = \Sigma P (z \cos \beta - y \cos \gamma).$$

Mas, como AC representa o eixo do conjugado resultante, as componentes de AC segundo os eixos coordenados representarão os eixos dos tres conjugados componentes; portanto, teremos:

$$L = CH, \ M = HK, \ N = AK,$$

d'onde

$$G = AC = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

$$\cos \lambda = \frac{L}{G}, \ \cos \mu = \frac{M}{G}, \ \cos \nu = \frac{G}{N}.$$

227. Para que as forças P', P'', P''', etc. applicadas ao solido possam resumir-se n'uma resultante unica, será evidentemente preciso que a resultante R e o conjugado G se achem situados n'um mesmo plano ou em planos parallelos, pois que então a força R poderá ser destruida por uma das duas forças do conjugado G; mas, tornar a força R parallela ao plano do conjugado G, é o mesmo que tornar o eixo $A\ C$ d'este conjugado perpendicular á direcção $A\ R$; portanto, o angulo CAR deve ser um angulo recto.

Ora, os angulos que $A\ R$ faz com os eixos Az, Ay, Ax tendo sido designados por (c, b, a) e os angulos que $A\ C$ faz com os mesmos eixos sendo (λ, μ, ν), teremos:

$$\cos C\ A\ R = \cos c . \cos \lambda + \cos b . \cos \mu + \cos a . \cos \nu ;$$

d'onde, fazendo

$$CAR = 90^{\circ}$$

e substituindo os valores, dados precedentemente, de *cos c*, *cos λ*, *cos b*, *cos μ*, *cos α*, *cos ν*, resultará :

$$o = \frac{Z}{R} \cdot \frac{L}{G} + \frac{Y}{R} \cdot \frac{M}{G} + \frac{X}{R} \cdot \frac{N}{G};$$

portanto,

$$Z\,L + Y\,M + X\,N = o,$$

será a condição necessaria para que o systema de forças possa ser reduzido a uma resultante unica.

228. Aqui deviamos terminar o nosso estudo sobre os solidos invariaveis, pois nenhuma noção importante deixamos de considerar ; mas, antes de passarmos ao estudo dos systemas variaveis, consideremos de novo a determinação das condições do equilibrio d'um solido livre e mostremos alguns dos outros modos que a sciencia possue para o estabelecimento d'essas equações.

Dois são os methodos que os geometras descobriram para chegar ao conhecimento de taes equações : um directo ou *estatico* ; outro indirecto ou *dynamico*.

O primeiro, devido a Lagrange, é uma applicação da lei geral das velocidades virtuaes ; o segundo, o methodo primitivo, é uma applicação das leis da composição das forças.

O methodo estatico, tão usualmente seguido, não mereceu a nossa preferencia, porque, quando applicarmos a lei geral da estatica ao estabelecimento das condições do equilibrio d'um systema variavel, veremos que o caso da invariabilidade dos solidos é algebricamente um caso particular da variabilidade dos systemas.

Então, ficará plenamente conhecido o meio de deduzir as seis condições geraes do equilibrio de um solido livre pela lei das velocidades virtuaes.

O methodo dynamico, evidentemente mais simples (porque as leis da composição das forças dependem sómente das duas primeiras leis fundamentaes da mecanica, ao passo que a lei das velocidades virtuaes emana do conjuncto das leis do

movimento), é susceptivel de differentes modalidades. A primitiva, devida a D'Alembert, foi a que seguimos, fazendo uma decomposição binaria de cada força applicada ao solido. Algumas outras modalidades, passamos a considerar.

229. Sejam P', P'', P''', etc. as intensidades d'um systema qualquer de forças applicadas respectivamente aos pontos $M'(x', y', z')$, $M''(x'', y'' z'')$, $M'''(x''', y''', z''')$ etc., d'um solido invariavel inteiramente livre. Designemos por $(\alpha', \beta', \gamma')$ $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, $(\alpha''', \beta''', \gamma''')$, etc. os angulos que as direcções d'essas differentes forças fazem, respectivamente, com tres eixos rectangulares fixos.

Isto posto, decomponhamos (fig. 92) cada uma das forças dadas em tres outras ($P' \cos \alpha'$, $P' \cos \beta'$, $P' \cos \gamma'$), ($P'' \cos \alpha''$, $P'' \cos \beta''$, $P'' \cos \gamma''$), etc. respectivamente parallelas aos eixos coordenados.

Feita esta decomposição geral, consideremos a força P' applicada ao ponto M'. Tomemos a sua componente $P' \cos \gamma'$.

Prolonguemos a direcção d'esta força até que ella encontre o plano dos xy no ponto $M_1(x', y', o)$.

N'este ponto, decomponhamos $P' \cos \gamma'$ em duas outras forças iguaes, parallelas e do mesmo sentido, applicadas aos pontos Q_1 e H_1 da recta $Q_1 H_1$.

Os pontos Q_1 e H_1 são tomados a distancias $2y'$ e $2x'$ do ponto A.

Evidentemente, estas duas componentes actuarão nos planos dos yz e dos zx e serão respectivamente perpendiculares aos eixos dos y e dos x.

Consideremos agora a componente $P' \cos \beta'$. Prolongando a direcção d'esta força até que ella encontre o plano dos xz no ponto $M'_1(x', z', o)$, decomponhamos $P' \cos \beta'$ em duas forças iguaes, parallelas e do mesmo sentido, applicadas perpendicularmente aos eixos dos x e dos z, a distancias $2x'$ e $2z'$ da origem das coordenadas. As duas componentes actuarão nos planos dos xy e dos yz.

Consideremos, finalmente, a componente $P' \cos \alpha'$. Prolongada a direcção d'esta força até que ella encontre o plano

dos yz no ponto M_1'' (y', z', o), decomponhamos $P' \cos \alpha'$ em duas forças iguaes, parallelas e do mesmo sentido, applicadas perpendicularmente aos eixos dos y e dos z, a distancias $2\,y'$ e $2\,z'$ da origem das coordenadas.

As duas componentes actuarão nos planos dos xy e dos xz.

E como podemos fazer uma decomposição analoga á da força P', considerando qualquer das outras forças P'', P''', $P^{\prime v}$, etc., teremos substituido todas as forças dadas por tres grupos de forças situadas nos tres planos coordenados. Estes tres grupos de forças serão :

No plano dos $x\,y$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} P' \cos \alpha', \frac{1}{2} P'' \cos \alpha'', \frac{1}{2} P''' \cos \alpha''', \text{etc.} \\ \frac{1}{2} P' \cos \beta', \frac{1}{2} P'' \cos \beta'', \frac{1}{2} P''' \cos \beta''', \text{etc.} \end{array} \right.$

No plano dos $x\,z$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} P' \cos \alpha', \frac{1}{2} P'' \cos \alpha'', \frac{1}{2} P''' \cos \alpha''', \text{etc.} \\ \frac{1}{2} P' \cos \gamma', \frac{1}{2} P'' \cos \gamma'', \frac{1}{2} P''' \cos \gamma''', \text{etc.} \end{array} \right.$

No plano dos $y\,z$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} P' \cos \beta', \frac{1}{2} P'' \cos \beta'', \frac{1}{2} P''' \cos \beta''', \text{etc.} \\ \frac{1}{2} P' \cos \gamma', \frac{1}{2} P'' \cos \gamma'', \frac{1}{2} P''' \cos \gamma''', \text{etc.} \end{array} \right.$

Em cada um dos tres planos coordenados temos, pois, dois systemas de forças parallelas a cada um dos eixos existentes n'esses planos.

Para que haja equilibrio no systema de forças dadas, será evidentemente necessario que o equilibrio exista em cada um dos planos coordenados.

E como, para que um systema de forças existentes n'um plano esteja em equilibrio, é preciso que a somma algebrica das componentes segundo cada um dos dois eixos coordenados seja nulla, bem como a somma algebrica dos

momentos das mesmas forças em relação ao terceiro eixo, teremos as nove condições seguintes:

$$\frac{1}{2}\Sigma (P \cos \alpha)= 0, \frac{1}{2}\Sigma (P \cos \beta) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \Sigma P (2y \cos \alpha - 2x \cos \beta) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \Sigma (P \cos \alpha) = 0, \frac{1}{2} \Sigma (P \cos \gamma) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \Sigma P (2 x \cos \gamma - 2 z \cos \alpha) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \Sigma (P \cos \beta) = 0, \frac{1}{2} \Sigma (P \cos \gamma) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \Sigma P (2 z \cos \beta - 2 y \cos \gamma) = 0 ;$$

mas, como estas nove equações são verdadeiramente seis, porque cada um dos eixos coordenados é commum a dois dos planos, o solido ficará em equilibrio quando as forças dadas satisfizerem ás condições seguintes :

$$\Sigma (P \cos \alpha) = 0, \Sigma (P \cos \beta) = 0, \Sigma (P \cos \gamma) = 0 ;$$

$$\Sigma P (y \cos \alpha - x \cos \beta) = 0, \Sigma P (x \cos \gamma - z \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P (z \cos \beta - y \cos \gamma) = 0.$$

230. Seja A (fig. 93) um ponto tomado arbitrariamente no espaço. Por este ponto tracemos tres eixos rectangulares fixos Ax, Ay, Az.

Consideremos uma qualquer das forças P' applicada ao ponto M' (x', y', z') d'um solido invariavel livre.

Designemos por (X', Y', Z') as componentes d'esta força parallelas aos tres eixos rectangulares considerados.

Isto posto, transportemos successivamente estas tres componentes para o ponto A, com o auxilio de tres conjugados, conforme o methodo (143) já estudado.

Como d'um modo analogo podemos fazer o transporte para o ponto A de todas as componentes (X'', Y'', Z''), (X''',

Y''', Z''') etc. das differentes forças P'', P''', etc. applicadas aos pontos M'' (x'', y'', z''), M''' (x''', y''', z'''), etc. do mesmo solido, teremos, segundo os tres eixos coordenados, as tres resultantes parciaes ΣX, ΣY, ΣZ, cuja composição ulterior nos dará a resultante total R de todas as forças dadas.

Por ser a grandeza d'esta resultante a mesma que a da diagonal do parallelipipedo rectangulo construido sobre estas tres resultantes parciaes, teremos:

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2};$$

mas, como, para que haja equilibrio do solido, a resultante deve ser nulla, teremos as seguintes condições:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0,$$

já sufficientemente conhecidas como equações do equilibrio de translação do solido.

231. Consideremos agora os conjugados convergentes em A, que resultaram do transporte de todas as forças para este ponto.

Sejam primeiro consideradas as componentes (X', Y', Z') da força P'.

A componente X' transportada de M' para o ponto A dá logar a um conjugado cujas forças são iguaes e parallelas a X' e cujo braço de alavanca é representado por AM_1 porque esta força X' podia ser supposta applicada no plano dos yz ao ponto M_1 de sua direcção. O momento d'este conjugado será, pois,

$$X'. AM_1 = X' \sqrt{y'^2 + z'^2}.$$

Podemos decompôr este conjugado em dois outros tendo a mesma força X' e cujos braços de alavanca sejam AN_1 ou y' e AQ_1 ou z'; o primeiro conjugado terá o momento $X'\ y'$ e se achará situado no plano dos xy; e o segundo terá o momento $X'\ z'$ e se achará situado no plano dos xz.

A componente Y' transportada de M′ para o ponto A analogamente dará logar a um conjugado cujas forças são iguaes e parallelas a Y' e cujo braço de alavanca se achará situado no plano dos xz.

O momento d'este conjugado será, pois,

$$Y' . \sqrt{x'^2 + z'^2} .$$

Decompondo-o em dois outros, situados nos planos dos xy e dos yz, os momentos d'estes conjugados componentes serão $Y'x'$ e $Y'z'$.

A componente Z' transportada de M' para o ponto A analogamente dará logar a um conjugado cujas forças são iguaes e parallelas a Z' e cujo braço de alavanca se achará situado no plano dos xy. O momento d'este conjugado será, pois,

$$Z' . \sqrt{x'^2 + y'^2} .$$

Decompondo-o em dois outros, situados nos planos dos xz e dos yz, os momentos d'estes conjugados componentes serão $Z'x'$ e $Z'y'$.

Si compuzermos em cada um d'estes tres planos os dois conjugados existentes, teremos:

No plano dos xy, um conjugado de momento...... $X'y' - Y'x'$.
No plano dos xz, um conjugado de momento...... $Z'x' - X'z'$.
No plano dos yz, um conjugado de momento...... $Y'z' - Z'y'$.

Nas expressões precedentes suppuzemos positivos os momentos dos conjugados que tendem a fazer gyrar o solido no sentido do eixo dos y para o eixo dos x, do eixo dos x para o eixo dos z e do eixo dos z para o eixo dos y; e suppuzemos negativos os momentos dos conjugados que tendem a fazer gyrar o solido em sentidos contrarios.

Cada uma das outras forças P'', P''', P^{v}, etc. analogamente dará logar a tres conjugados pelo transporte das respectivas componentes para o ponto A. Provirão, portanto, pela composição dos differentes conjugados situados

nos tres planos coordenados, tres conjugados resultantes parciaes, cujos momentos serão, respectivamente, iguaes á somma algebrica dos conjugados componentes, isto é, teremos :

No plano dos xy, um conjugado de momento...... $\Sigma(Xy - Yx)$.
No plano dos xz, um conjugado de momento...... $\Sigma(Zx - Xz)$.
No plano dos yz, um conjugado de momento....... $\Sigma(Yz - Zy)$.

Evidentemente estes tres conjugados, que representaremos por L, M e N, poderão ser compostos em um conjugado resultante unico $(S, - S)$, cujo momento G será dado pela expressão seguinte :

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

mas, como, para que haja equilibrio do solido, este conjugado resultante deve ser nullo, dar-se-hão as seguintes condições :

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0;$$

ou

$$\Sigma(Xy - Yx) = 0,\ \Sigma(Zz - Xz) = 0,\ \Sigma(Yz - Zy) = 0,$$

já sufficientemente conhecidas como equações do equilibrio de rotação do solido.

Tal é o processo devido a Poinsot.

232. Existe uma outra modalidade do methodo dynamico para acharem-se as condições do equilibrio d'um solido livre, mas é uma pequena variante do methodo de d'Alembert. Consiste em substituir o systema de forças applicadas aos differentes pontos d'um solido livre por um outro composto de tres grupos de forças : forças perpendiculares ao plano dos xy ; forças situadas no plano dos xy, mas parallelas ao eixo dos y ; e forças situadas no eixo dos x. O equilibrio do solido dependerá assim do equilibrio dos tres systemas parciaes de forças.

CAPITULO IV

EQUILIBRIO DE UM SYSTEMA VARIAVEL

---

1. METHODOS GERAES DE LAGRANGE

233. Diz-se que um systema material é de natureza *variavel* quando a sua fórma muda constantemente com as suas posições no espaço.

O conhecimento das leis, segundo as quaes varia a fórma d'um corpo dado, define-se por equações, differenciaes ou finitas.

E' muito difficil o estudo dos systemas variaveis, pois que cada corpo dado apresenta modos de variabilidade cujas leis são muitas vezes desconhecidas ; mas, uma vez conhecidas as leis que regem a variabilidade da fórma d'um systema, tudo dependerá de difficuldades puramente algebricas a que possam nos conduzir os preciosos methodos geraes, descobertos por Lagrange.

234. A fórmula

$$\Sigma \,(P \,\delta p) = 0 \,, \qquad (1)$$

que traduz algebricamente a lei geral das velocidades virtuaes, póde ser posta sob uma fórma mais conveniente para as suas applicações.

Sejam (X', Y', Z') as componentes parallelas a tres eixos rectangulares fixos da força P' applicada a um dos pontos do systema que se considera.

Representemos por $(\delta x', \delta y', \delta z')$ as variações das coordenadas (x', y', z') d'este ponto, correspondentes a um

deslocamento virtual compativel com as condições de ligação dos differentes pontos do systema.

Em virtude da lei geral das velocidades virtuaes, teremos :

$$P' \delta p' = X' \delta x' + Y' \delta y' + Z' \delta z' ;$$

analogamente, para todos os outros pontos (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), etc., teremos :

$$P'' \delta p'' = X'' \delta x'' + Y'' \delta y'' + Z'' \delta z'',$$

$$P''' \delta p''' = X''' \delta x''' + Y''' \delta y''' + Z''' \delta z''',$$

etc., etc.

Substituindo estes valores na equação *(1)* resultará uma equação da fórma seguinte :

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0 .$$

235. Qualquer que seja o systema variavel que suppuzermos em equilibrio sob a acção de forças quaesquer applicadas aos seus differentes pontos materiaes, si o equilibrio deixasse de ter logar, o systema começaria a mover-se.

Este movimento, em todos os casos, poderá ser considerado como composto: 1º, dos movimentos de translação e rotação do systema ; 2º, dos movimentos relativos dos differentes pontos, pelos quaes seriam alteradas as posições relativas dos pontos entre si e, portanto, as suas mutuas ligações.

Para que o systema esteja completamente em equilibrio será necessario que sejam annullados todos estes movimentos.

O movimento de translação e o movimento de rotação são devidos á acção exclusiva das forças exteriormente applicadas aos differentes pontos do systema; e são os movimentos relativos devidos á acção exclusiva das forças interiores, que se exercem nas ligações do mesmo systema.

Lagrange instituiu dois methodos geraes para o estabelecimento das condições do equilibrio de um systema

qualquer. No primeiro, considerando apenas os movimentos de translação e rotação, fez abstracção dos movimentos relativos dos pontos entre si, ou, o que é o mesmo, das forças interiores do systema; no segundo, considerou o systema sujeito á acção de forças quaesquer, tanto exteriores como interiores.

236. *Primeiro methodo.*—A lei geral das velocidades virtuaes, sómente relativa ás forças exteriores, permitte-nos o estabelecimento das condições do equilibrio de um systema qualquer, abstracção feita das forças interiores.

Com effeito, supponhamos (fig. 94) que os pontos de um systema qualquer inteiramente livre sejam referidos a tres eixos rectangulares Ax, Ay, Az, fixos no espaço. Sejam $(X', Y' Z')$, (X'', Y'', Z''), (X''', Y''', Z'''), etc. as componentes parallelas a estes eixos das forças P', P'', P''', etc. applicadas aos differentes pontos (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''') etc. do mesmo systema.

Si o systema acha-se em uma situação de equilibrio, verifica-se a lei geral das velocidades virtuaes, d'onde a equação geral

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = o \qquad (2)$$

nos fornecerá as condições necessarias a que as forças devem satisfazer para que o systema se conserve em equilibrio.

Por um ponto qualquer A_1 do systema considerado tiremos tres novos eixos rectangulares A_1x_1, $A_1 y_1$, A_1z_1, e sejam (a, b, c) as coordenadas da origem A_1, em relação aos eixos primitivos. As fórmulas respectivas á transformação geral das coordenadas (x, y, z) de um ponto qualquer relativamente aos eixos primitivos em outras coordenadas (x_1, y_1, z_1) relativas aos novos eixos serão:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + m x_1 + n y_1 + p z_1, \\ y = b + m' x_1 + n' y_1 + p' z_1, \\ z = c + m'' x_1 + n'' y_1 + p'' z_1. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Os coefficientes m, n, p, m', n', p', etc. que definem a

posição mutua dos novos eixos em relação aos primitivos, devem satisfazer ás relações seguintes :

$$\left.\begin{aligned} m^2 + m'^2 + m''^2 &= 1, \\ n^2 + n'^2 + n''^2 &= 1, \\ p^2 + p'^2 + p''^2 &= 1; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} mn + m'n' + m''n'' &= o, \\ mp + m'p' + m'p'' &= o, \\ np + n'p' + n''p'' &= o; \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

por serem :

$$m = cos\ (x,\ x_1),\ n = cos\ (x,\ y_1),\ p = cos\ (x,\ z_1),$$

$$m' = cos\ (y,\ x_1),\ n' = cos\ (y,\ y_1),\ p' = cos\ (y,\ z_1),$$

$$m'' = cos\ (z,\ x_1),\ n'' = cos\ (z,\ y_1),\ p'' = cos\ (z,\ z_1).$$

Isto posto, como a lei geral das velocidades virtuaes, para poder verificar-se e, portanto, traduzir o equilibrio do systema, exige que os deslocamentos virtuaes que lhe sejam attribuidos fiquem sempre compativeis com as ligações do mesmo systema, de modo que todos os seus pontos materiaes conservem as posições respectivas e as suas mutuas distancias, poderemos imaginar, qualquer que seja a natureza do systema ou a mutua ligação dos seus differentes pontos, que estas distancias sejam como si fossem invariaveis e o systema fosse um solido invariavel. Este simples artificio da reducção do caso da variabilidade ao da invariabilidade não teria logar si não houvessemos feito abstracção das forças interiores do systema.

Si, pois, o systema variavel considerado torna-se um solido invariavel, podemos conceber que os novos eixos A_1x_1, A_1y, A_1z_1 façam parte do solido.

Então, attribuindo-lhe um deslocamento infinitamente pequeno no espaço, este movimento não só mudará a posição dos novos eixos em relação aos primitivos, como tambem as posições das primitivas coordenadas ; mas, as coordenadas em relação aos novos eixos ficarão immutaveis. Assim, differenciando com o signal δ as equações (3), suppondo

constantes as coordenadas (x_1, y_1, z_1), resúltarão as relações seguintes :

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \delta a + x_1\,\delta m + y_1\,\delta n + z_1\,\delta p, \\ \delta y &= \delta b + x_1\,\delta m' + y_1\,\delta n' + z_1\,\delta p', \\ \delta z &= \delta c + x_1\,\delta m'' + y_1\,\delta n'' + z_1\,\delta p''. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Supponhamos que antes do deslocamento attribuido ao systema os novos eixos coincidiam com os primitivos, que foram considerados fixos no espaço. Então, não bastará que sejam nullas as coordenadas (a, b, c), mas será sufficiente que tenhamos :

$$x = x_1 \; y = y_1 \; z = z_1;$$

portanto,

$$\left.\begin{aligned} m &= 1, \; n = o, \; p = o, \\ m' &= o, \; n' = 1, \; p' = o, \\ m'' &= o, \; n'' = o, \; p'' = 1. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Differenciando as relações (4) e (5) e attendendo aos valores dados pelas igualdades (7), teremos :

$$\left.\begin{aligned} &\delta m = o, \; \delta n' = o, \; \delta p'' = o, \\ &\delta n + \delta m' = o, \; \delta p + \delta m'' = o, \; \delta p' + \delta n'' = o\,; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

d'onde, fazendo :

$$\begin{aligned} \delta p &= -\,\delta m'' = \delta\omega, \\ \delta m' &= -\,\delta n = \delta\varphi, \\ \delta n'' &= -\,\delta p' = \delta\psi, \end{aligned}$$

e tendo em vista as tres primeiras igualdades (8), as relações (6) se transformarão nas seguintes :

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta a - y\,\varphi x + z\,\delta\omega, \\ \delta y &= \delta b + x\,\delta\varphi - z\,\delta\psi, \\ \delta z &= \delta c - x\,\delta\omega + y\,\delta\psi. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores na equação (2), teremos :

$$\delta\alpha\,\Sigma X + \delta b\,\Sigma Y + \delta c\,\Sigma Z + \delta\varphi\,\Sigma(Yx - Xy) + \delta\,\omega\Sigma(Xz - Zx) + \\ + \delta\psi\,\Sigma(Zy - Yz) = 0.$$

Ora, para que esta equação tenha logar, será evidentemente preciso que os coefficientes das variações arbitrarias

$$\delta a,\ \delta b,\ \delta c,$$
$$\delta\varphi,\ \delta\omega,\ \delta\psi,$$

sejam separadamente nullos. D'onde

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma X = 0,\ \Sigma Y = 0,\ \Sigma Z = 0, \\ \Sigma (Yx - Xy) = 0,\ \Sigma (Xz - Zx) = 0,\ \Sigma (Zy - Yz) = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Taes são as equações que traduzem as condições geraes do equilibrio de translação e rotação de um systema variavel qualquer. Estas seis equações não serão sufficientes para exprimir o completo equilibrio do mesmo systema, pois ellas não impedem os movimentos relativos dos pontos entre si. Ellas, combinadas com as equações que definem a variabilidade do systema material considerado, nos permittirão, em geral, o conhecimento da figura do systema.

237. Si se tratasse de um systema invariavel, as seis equações (9) bastariam para estabelecer de um modo completo o seu equilibrio.

Esta observação tem por fim mostrar como o methodo *estatico* (228) nos conduz ás seis equações geraes do equilibrio de um solido invariavel, já deduzidas pelo methodo *dynamico*.

238. *Segundo methodo.* — Sejam, de uma maneira geral, as ligações existentes entre os differentes pontos de um systema qualquer, inteiramente livre, dadas pelas equações

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0, \ldots \qquad (10)$$

Imaginando que o systema considerado soffra um deslocamento infinitamente pequeno, compativel com as ligações de seus pontos, estas equações deverão verificar-se pela

substituição das coordenadas relativas ás novas posições d'estes pontos ; assim, teremos as equações seguintes :

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{dL}{dx}\right)\delta x+\left(\frac{dL}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{dL}{dz}\right)\delta z+\left(\frac{dL}{dx'}\right)\delta x'+\text{etc.}=0,\\
\left(\frac{dM}{dx}\right)\delta x+\left(\frac{dM}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{dM}{dz}\right)\delta z+\left(\frac{dM}{dx'}\right)\delta x'+\text{etc.}=0,\\
\left(\frac{dN}{dx}\right)\delta x+\left(\frac{dN}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{dN}{dz}\right)\delta z+\left(\frac{dN}{dx'}\right)\delta x'+\text{etc.}=0,
\end{aligned}\right\}\ (11)$$

etc., etc., etc. Devendo ser eliminadas da fórmula geral da estatica as variações das coordenadas que não forem independentes, Lagrange empregou o *methodo geral dos multiplicadores*. Consiste este methodo em multiplicar-se respectivamente cada uma das equações (11) por um coefficiente indeterminado e ajuntar todas estas equações á equação total do equilibrio.

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0.$$

Igualando-se separadamente a zero o coefficiente de cada variação independente, ter-se-ha o conjuncto de equações parciaes do equilibrio que a solução do problema exige. Eliminando-se d'estas equações os multiplicadores auxiliares, as equações finaes, unidas ás condições (10) de ligação do systema, nos darão as posições dos differentes pontos em equilibrio, isto é, a figura do systema. Assim, as equações parciaes do equilibrio serão:

$$\left.\begin{aligned}
X+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dx}\right)+\nu\left(\frac{dN}{dx}\right)+\text{etc.}=0,\\
Y+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dy}\right)+\nu\left(\frac{dN}{dy}\right)+\text{etc.}=0,\\
Z+\lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dz}\right)+\nu\left(\frac{dN}{dz}\right)+\text{etc.}=0,\\
X'+\lambda\left(\frac{dL}{dx'}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dx'}\right)+\nu\left(\frac{dN}{dx'}\right)+\text{etc.}=0,
\end{aligned}\right\}\ (12)$$

etc., etc., etc. O numero d'estas equações sendo exactamente o mesmo que o das coordenadas dos differentes pontos do

systema considerado, seja este numero designado por m; e as equações de condição

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0, \ldots$$

sejam em numero n. Si das m equações (12) são eliminados os n multiplicadores auxiliares (pois são tantos quantas as equações que definem o systema), resultará um grupo de $(m-n)$ equações. E este grupo de $(m-n)$ equações reunido ás n equações de ligação, constituirá, em geral, um grupo determinado de equações, proprio a fixar as posições de todos os pontos do systema em equilibrio.

239. Resta-nos agora procurar a *significação mecanica* dos termos affectos dos multiplicadores. Examinando as equações (12), facilmente se reconhecerá que ellas seriam exactamente as mesmas, si, em logar da equação $L = 0$, tivessemos de considerar, além das forças exteriores, outras novas forças cujas componentes segundo os eixos coordenados fossem respectivamente

$$\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right);$$

$$\lambda\left(\frac{dL}{dx'}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dy'}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dz'}\right);$$

$$\lambda\left(\frac{dL}{dx''}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dy''}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dz''}\right);$$

etc., etc. Ora, isto só poderia acontecer si a ligação definida pela equação $L = 0$ produzisse realmente estas forças, conforme a lei de Lagrange (69).

A grandeza da força que tivesse de ser applicada ao ponto cujas coordenadas são (x, y, z), seria

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}.$$

Ella seria normal á superficie definida pela equação $L=0$, cujas variaveis unicas fossem (x, y, z). Com effeito, pois

$$\left(\frac{dL}{dx}\right), \left(\frac{dL}{dy}\right), \left(\frac{dL}{dz}\right),$$

são valores proporcionaes aos cosenos dos angulos que a normal a essa superficie faz respectivamente com os tres eixos rectangulares fixos.

D'um modo analogo as equações $M = o$, $N = o$, etc. poderiam deixar de ter logar si fossem applicadas novas forças a todos os pontos do systema. *Estas forças auxiliares, que podem substituir as ligações existentes entre todos os pontos, são as que produzem as tensões e as pressões nas ligações do systema.*

Supprimidas todas as ligações, os pontos do systema ficarão completamente livres; e as forças exteriormente applicadas a estes pontos e representadas nas equações (12) por (X, Y, Z), (X', Y', Z'), etc. serão respectivamente destruidas pelas forças representadas pelos termos affectos dos multiplicadores.

Tal é em que consiste o mais geral dos methodos de Lagrange, para o estabelecimento das condições do equilibrio d'um systema livre qualquer, sob a acção de forças quaesquer.

2. POLYGONO FUNICULAR

240. Supponhamos (fig. 95) um fio inextensivel, perfeitamente flexivel e d'um comprimento qualquer, cujos extremos sejam os pontos A e B.

Sejam M, M', M'', etc. differentes pontos d'este systema, respectivamente solicitados pelas forças dadas P, P', P'', etc. que actuam segundo os fios MC, $M'C'$, $M''C''$, etc. ligados aos mesmos pontos.

Aos pontos M e $M^{'v}$, os mais proximos de A e B, tambem appliquemos respectivamente sobre as partes do fio MA e $M^{'v}B$ duas forças dadas H e K.

No estado de equilibrio, o fio tomará a figura de um polygono cujos vertices serão os pontos A, M, M', etc., systema que chama-se um *polygono funicular*.

As condições a que as forças dadas têm de satisfazer para que o systema esteja em equilibrio devem ser estabelecidas pelo segundo methodo de Lagrange (238); mas, antes de fazer applicação d'este methodo, podemos tambem chegar

ás condições do equilibrio do polygono funicular pela composição das forças dadas, segundo o methodo primitivamente estabelecido.

241. Para que o polygono se ache em equilibrio sob a acção das forças dadas, devem ser impedidas as translações e rotações dos seus differentes lados ; e será sufficiente que cada lado seja solicitado em seus dois extremos por forças iguaes e contrarias.

A resultante das forças H e P applicadas ao ponto M deve ser dirigida segundo o prolongamento $M\ D$ do lado $M'\ M$, porque o equilibrio do polygono não será modificado si suppuzermos fixo o ponto M' ; então, só a fixidez d'este ponto poderia destruir a resultante dirigida segundo $M\ D$.

Transportando, pois, para o ponto M' a resultante das forças H e P, teremos n'este ponto de compol-a com a força P.

A resultante das forças H, P e P' será evidentemente dirigida segundo o prolongamento $M'\ D'$ do lado $M''\ M'$ e poderá, pois, ser transportada para o ponto M''.

A composição da força P'' com a resultante das forças $H,\ P,\ P'$ nos dará uma resultante dirigida segundo $M''\ D''$, prolongamento do lado $M'''\ M''$, a qual poderá ser transportada para o ponto M'''.

A composição da força P''' com a resultante das forças $H,\ P,\ P',\ P''$ nos dará uma resultante dirigida segundo $M'''\ D'''$, prolongamento do lado $M'^{\text{v}}\ M'''$, a qual poderá ser transportada para o ponto M'^{v}.

Finalmente, a composição da força P'^{v} com a resultante das forças $H,\ P, P',\ P'',\ P'''$ nos dará uma resultante dirigida segundo $M'^{\text{v}}\ D'^{\text{v}}$, prolongamento do lado $B\ M'^{\text{v}}$, a qual deverá ser destruida pela força K, dirigida segundo $M'^{\text{v}}\ B$, para que o polygono esteja em equilibrio.

Portanto, a resultante de todas as forças dadas $H,\ P, P'$, P'', P''', P'^{v}, K, deve ser nulla, isto é, as forças devem ser taes que transportadas para um mesmo ponto M'^{v}, parallelamente ás respectivas direcções, estejam em equilibrio.

Si, pois, designarmos por (a, b, c), (e, f, g), (α, β, γ), (α', β', γ'), ($\alpha'', \beta'', \gamma''$) etc. os angulos que respectivamente as forças H, K, P, P', P'', etc. fazem com tres eixos rectangulares Ax, Ay, Az, traçados por um ponto qualquer do espaço, as condições do equilibrio do polygono funicular serão as tres seguintes;

$$\left.\begin{array}{l} H \cos a + K \cos e + P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + \text{etc.} = o, \\ H \cos b + K \cos f + P \cos \beta + P' \cos \beta' + \text{etc.} = o, \\ H \cos c + K \cos g + P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + \text{etc.} = o. \end{array}\right\} \quad (13)$$

242. Si as forças H, K, P, P', etc. não satisfazem, por suas intensidades e direcções, ás condições precedentes, será impossivel que haja um polygono-funicular por meio do qual estas forças estejam em equilibrio, qualquer que seja a figura dada ao mesmo polygono; mas, si essas equações são verificadas, poderemos dar ao polygono funicular uma figura determinada, que convenha ao estado de equilibrio das mesmas forças, praticando simples composições de forças.

E' assim que, conhecendo as direcções MA e MC e as intensidades das forças H e P, determinaremos a resultante U d'estas duas forças, cuja direcção representaremos por MD.

Sobre o prolongamento de MD e a partir do ponto M tomaremos a grandeza que convem ao lado MM'.

Ao ponto M' applicaremos a resultante U segundo a direcção $M'M$ e a força P' segundo a sua direcção $M'C$.

Compondo as duas forças U e P', determinaremos a sua resultante V, cuja direcção representaremos por $M'D'$.

Sobre o prolongamento de $M'D'$ e a partir do ponto M' tomaremos a grandeza que convem ao lado $M'M''$.

Ao ponto M'' applicaremos V segundo a direcção $M''M'$ e a força P'' segundo a sua direcção $M''C''$.

Compondo as duas forças V e P'', determinaremos a sua resultante W, cuja direcção representaremos por $M''D''$.

Sobre o prolongamento de $M''D''$ e a partir do ponto M'' tomaremos a grandeza que convem ao lado $M''M'''$.

Ao ponto M''' applicaremos a resultante W segundo a direcção $M'''\ M''$ e a força P''' segundo a sua direcção $M'''\ C'''$.

Compondo as duas forças W e P''', determinaremos a resultante X, cuja direcção representaremos por $M'''\ D'''$.

Sobre o prolongamento de $M'''\ D'''$ e a partir do ponto M''' tomaremos a grandeza que convem ao lado $M'''\ M'^{v}$.

Ao ponto M'^{v} applicaremos a resultante X segundo a direcção $M'^{v}\ M'''$ e a força P'^{v} segundo a sua direcção $M'^{v}\ C'^{v}$.

Compondo as duas forças X e P'^{v}, determinaremos a sua resultante Y, cuja direcção representaremos por $M'^{v}\ D'^{v}$.

Esta resultante Y, finalmente, deverá ser igual e directamente opposta á força K, cuja direcção é representada por $M'^{v}\ B$.

243. Quando as forças dadas H, K, P, P', etc. verificam por suas intensidades e direcções as equações (13) e que o polygono tem tomado a figura propria ao seu equilibrio, a intensidade commum das duas forças iguaes e oppostas que puxam cada um dos lados segundo o seu prolongamento, é a medida da *tensão* que cada lado experimenta.

Não basta, na pratica, que se calcule a tensão de cada lado do polygono funicular; será tambem preciso que, pela experiencia, se verifique que ella não excede á tensão que uma corda do mesmo diametro, da mesma materia e estructura que a do polygono funicular póde supportar sem arrebentar.

A tensão variará d'um lado a outro do polygono funicular: a do lado MM' será igual á resultante das forças H e P ou á das forças P', P'', P''', P'^{v}, K; a do lado $M'\ M''$ será igual á resultante das forças H, P, P' ou á das forças P'', P''', P'^{v}, K; a do lado $M''\ M'''$ será igual á resultante das forças H, P, P', P'' ou á das forças P''', P'^{v}, K, e assim successivamente. Será, pois, facil a determinação da tensão dos differentes lados, todas as vezes que o polygono esteja em equilibrio sob a acção das forças H, K, P, P', etc., cujas intensidades e direcções sejam todas conhecidas.

244. Sendo fixos os pontos extremos A e B do polygono funicular, as forças H e K representarão não só as tensões dos lados AM e BM'^{v}, como tambem, tomadas em sentidos contrarios, representarão as pressões exercidas nos pontos fixos A e B. Os valores d'estas pressões H e K e dos angulos (a, b, c), (e, f, g), que determinam as direcções dos dois lados extremos AM e BM'^{v} do polygono funicular, não serão dados; mas estas oito incognitas poderão ser calculadas pelas tres equações (13) e pelas cinco equações seguintes:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1,$$

$$\cos^2 e + \cos^2 f + \cos^2 g = 1,$$

$$AB \cos (AB, Ax) =$$

$$= AM \cos a + BM'^{v} \cos e + MM' \cos a' + M' M'' \cos a'' + \text{etc.},$$

$$AB \cos (AB, Ay) =$$

$$= AM \cos b + BM'^{v} \cos f + MM' \cos b' + M' M'' \cos b'' + \text{etc.},$$

$$AB \cos (AB, Az) =$$

$$= AM \cos c + BM'^{v} \cos g + MM' \cos c' + M' M'' \cos c'' + \text{etc.},$$

designando por (a', b', c'), (a'', b'', c''), etc. os angulos que respectivamente os lados $M\ M'$, $M'\ M''$, etc. fazem com tres eixos rectangulares traçados pelo ponto fixo A.

245. O calculo d'estas oito incognitas será, em geral, muito complicado; mas, sendo dada a figura do polygono, facilmente poderão ser conhecidas as tensões dos differentes lados do mesmo polygono. Com effeito, se decompuzermos a força P applicada ao ponto M em duas outras forças dirigidas segundo os prolongamentos dos lados AM e MM', as componentes serão os valores das tensões dos dois lados. A componente dirigida segundo o prolongamento de AM deverá ser igual á força que actua segundo AM quando o ponto A é supposto livre; mas, quando este ponto fôr sup-

posto fixo, ella nos dará a medida da pressão exercida sobre elle. A expressão d'esta componente será:

$$H = P \frac{sen\ C\ MM'}{sen\ A\ MM'}.$$

Analogamente á decomposição da força P, cada uma das forças P', P'', etc. poderá ser decomposta em duas outras dirigidas segundo os prolongamentos dos lados que concorrem nos respectivos pontos de applicação. A força P', por exemplo, terá para componentes a tensão do lado MM', já conhecida pela decomposição da força P no ponto M, e a tensão do lado adjacente $M'\ M''$. A expressão do valor da pressão exercida no ponto B pela força K será:

$$K = P^{\prime v} \frac{sen\ M'''\ M^{\prime v}\ C^{\prime v}}{sen\ M'''\ M^{\prime v}\ B}.$$

246. Quaesquer que sejam as condições dos pontos extremos A e B do polygono funicular, quer sejam fixos ou livres no espaço, si um ou mais dos pontos M, M', M'', etc., em que se acham applicadas as forças dadas, podem escorregar livremente ao longo do fio, quando substituidos por anneis moveis, novas condições de equilibrio terão logar. Consideremos, por exemplo (fig. 96), que o ponto M'' seja um annel movel que póde escorregar sem attrito ao longo da parte do polygono $M'M''M'''$.

Si o polygono acha-se em equilibrio, podemos imaginar que M' e M'' sejam dois pontos fixos. A força P'', que actua segundo $M''C''$ sobre o ponto M'', obrigará este ponto a descrever uma ellipse. E como o plano d'esta curva sómente é sujeito a passar pelos fócos M' e M'', é claro que elle descreverá em torno da recta $M'\ M''$ um ellipsoide de revolução cujo grande eixo será igual á somma dos raios vectores $M'M''$ e $M'''M''$. O ponto M'' devendo estar sempre situado sobre a superficie d'este ellipsoide, ou sobre o arco de uma ellipse movel em torno de $M'M''$, não poderá achar-se em

equilibrio sem que a direcção $M''C''$ da força P'' seja normal a esta curva. Assim, procuremos a condição necessaria para que a força P'' seja normal a uma ellipse. Para achal-a, tracemos a tangente TT' ao ponto M'' e tiremos a normal $M''N$. Tomemos sobre o prolongamento do raio vector $M'''M''$ uma parte $M''G$ igual ao outro raio vector $M'M''$ e seja I o ponto de intersecção da tangente TT' e da distancia $M'G$. Os dois triangulos $M'M''I$ e $GM''I$ são iguaes e, portanto, os angulos $M'M''T$ e $GM''I$ o serão; mas este ultimo angulo é igual ao seu verticalmente opposto $M'''M''T'$, d'onde os angulos que os raios vectores formam respectivamente com a tangente ao ponto M'' são iguaes.

Portanto,

$$M'\ M''\ T = M'''\ M''\ T';$$

mas tambem os angulos da normal $N\,M''$ nos dão:

$$N\ M''\ T = N\ M''\ T';$$

portanto,

$$N\ M''\ T - M'\ M''\ T = N\ M''\ T' - M'''\ M''\ T';$$

d'onde

$$N\ M''\ M' = N\ M''\ M''';$$

logo, o angulo $M'\ M''\ M'''$ deve ser dividido ao meio pela direcção da força P'', que actua segundo $M''\ C''$. Tal é a condição procurada.

Assim, quando na construcção da figura do polygono funicular (242) encontrarmos o caso d'um annel movel M'' e que houvermos obtido a resultante das duas forças dirigidas segundo $M''\ M'$ e $M''\ C''$, cujo prolongamento deve ser o lado $M''\ M'''$, si os angulos $C''\ M''\ M'$ e $C''\ M''\ M'''$ não forem iguaes entre si, é claro que o polygono não se achará em equilibrio.

D'esta observação resulta ser preciso que a direcção do fio $M''\ C''$, ligado a um annel movel, não seja previamente

dada, afim de que, determinada d'um modo conveniente, possa satisfazer a condição de igualdade dos dois angulos $C'' M'' M'$ e $C'' M'' M'''$.

247. Si o polygono acha-se em equilibrio, as tensões dos dois lados adjacentes $M' M''$ e $M'' M'''$ a um annel movel serão iguaes entre si.

Com effeito, pois que estes dois lados fazem angulos iguaes com a direcção da força P'' applicada ao annel M'' e as tensões d'estes lados são as componentes d'esta força, segundo as suas proprias direcções.

Esta igualdade de tensão dos dois lados adjacentes $M' M''$ e $M'' M'''$ é evidente por si mesma, pois que estes dois lados, ao longo dos quaes o annel M'' póde correr, são formados por uma unica parte do fio, na qual a tensão deve ser constante em toda a sua extensão $M' M'' M'''$.

248. Representando estas duas tensões pelas rectas iguaes $M'' T$ e $M'' T'$ (fig. 97), tomadas sobre as direcções d'estas forças e por θ'' o angulo $M' M'' M'''$, a sua resultante $M'' P_2$, dirigida segundo a diagonal do losango $M'' T P_2 T'$, será dada pela relação seguinte :

$$P_2 = T \cos \frac{1}{2} \theta'' + T' \cos \frac{1}{2} \theta'' ;$$

d'onde, por serem iguaes as tensões T e T', virá :

$$P_2 = 2 T \cos \frac{1}{2} \theta'' ;$$

mas, como a força P'', dirigida segundo $M'' C''$, é igual e directamente opposta á resultante P_2, teremos :

$$P'' = 2 T \cos \frac{1}{2} \theta'' .$$

Si fixarmos o annel M'', elle supportará um esforço de pressão dirigido no plano $M' M'' M'''$ e igual a P''.

249. Si todos os pontos M, M', M'', etc., são substituidos por anneis moveis, as direcções das forças P, P',

P'', etc. dividirão respectivamente em duas partes iguaes o angulo dos lados adjacentes a seus pontos de applicação.

N'este caso, a tensão será constante em toda a extensão do fio e cada uma das forças P, P', P'', etc. terá com a tensão constante T a relação precedentemente estabelecida para a força P'', isto é, teremos :

$$P = 2\ T \cos \frac{1}{2} \theta\ ,\ P' = 2\ T \cos \frac{1}{2} \theta'\ ,$$

etc., etc.

Si os anneis M, M', M'', etc. forem fixos no espaço, o fio que por elles passar, sem attrito, não poderá achar-se em equilibrio sem que appliquemos ás suas extremidades $A\ M$ e $B\ M^{v}$ duas forças iguaes e actuando em sentidos contrarios.

Em cada um dos anneis se exercerá uma pressão dirigida no plano dos lados que lhe são contiguos e igual ao producto do dobro da tensão pelo coseno da semi-inclinação dos mesmos lados.

250. Si todas as forças P, P', P'', etc., são pesos dados, actuando sobre um polygono funicular suspenso a dois pontos fixos, A e B, o polygono terá todos os seus lados situados no plano vertical que passa por estes pontos.

Si este plano é o dos xy, a terceira equação (13) não terá mais logar e as duas outras se reduzirão á fórma seguinte :

$$\left.\begin{aligned} H \cos a + K \cos e &= o, \\ H \cos b + K \cos f + \Pi &= o, \end{aligned}\right\}$$

suppondo que os angulos $(a,\ e)$ sejam formados com o eixo horizontal pelos lados extremos do polygono, os angulos (b, f) sejam formados pelos mesmos lados com o eixo dirigido no sentido da gravidade e representando por Π a somma dos pesos P, P', P'', etc. applicados aos differentes vertices M, M', M'', etc. do polygono funicular.

O equilibrio do polygono subsistirá si imaginarmos que a sua figura seja invariavel. Assim, a força Π será igual e directamente opposta á resultante das forças H e K, como

nos indica a segunda das equações precedentes. Ella passará pelo ponto O (fig. 98), em que se encontram os prolongamentos dos lados extremos AM e BM'^{v} e no qual poderemos suppôr applicadas as forças H e K.

As tensões dos lados extremos, ou as pressões H e K que se exercem nos pontos fixos A e B, serão dadas pelas relações seguintes :

$$H = \Pi \frac{sen\ B\ O\ y}{sen\ A\ O\ B}, \quad K = \Pi \frac{sen\ A\ O\ y}{sen\ A\ O\ B}.$$

251. Seja M (fig. 99) o ponto de encontro de tres fios ligados a tres pontos fixos A, B, C. Supponhamos que n'este ponto M seja suspenso um peso P segundo a vertical MD. Sobre o prolongamento d'esta recta tomemos um ponto D, tal que MD' represente a intensidade do peso P. Decompondo esta força MD' segundo as tres direcções MA, MB, MC, as tres componentes sejam MA', MB', MC'. Ellas exprimirão as tensões dos tres fios convergentes em M, ou as pressões exercidas nos tres pontos fixos A, B, C. O problema será, pois, completamente determinado; mas, si tivessemos um systema de quatro ou mais fios convergentes em M, a decomposição de uma força P segundo todas as direcções dadas daria logar a muitas soluções, de modo que as tensões dos fios, ou as pressões exercidas nos pontos fixos em que elles se achassem ligados, seriam indeterminadas.

252. Feito este estudo do polygono funicular, poderiamos dal-o por terminado si não fosse o desejo de demonstrar como o methodo de Lagrange (238) estabelece d'uma maneira geral as condições do equilibrio d'um systema d'essa natureza. E' o que passamos a fazer.

Para acharmos as condições do equilibrio d'um polygono funicular, consideremos primeiro que o systema seja sómente formado por tres pontos M, M', M'', d'um fio perfeitamente flexivel e inextensivel. Decomponhamos as forças applicadas em cada vertice, segundo tres eixos rectangulares fixos. Sejam (x, y, z) as coordenadas do ponto M, (x', y', z') as coordenadas do ponto M' e (x'', y'', z'') as do ponto M''.

Designemos por (X, Y, Z) as componentes da força exterior applicada do ponto M; por (X', Y', Z') as componentes da força exterior applicada ao ponto M', e por (X'', Y'', Z'') as componentes da força exterior applicada ao ponto M''.

Sejam l e l' os comprimentos invariaveis dos lados MM' e $M'M''$. As equações de ligação que nos definem o systema serão :

$$\left.\begin{aligned} L &= l - \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} = 0, \\ M &= l' - \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Isto posto, façamos uso do methodo geral (238). Differenciando com o signal δ as equações precedentes, teremos :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(x'-x)}{l}\,\delta x' + \frac{(x-x')}{l}\,\delta x + \frac{(y'-y)}{l}\,\delta y' + \\ &+ \frac{(y-y')}{l}\,\delta y + \frac{(z'-z)}{l}\,\delta z' + \frac{(z-z')}{l}\,\delta z = 0, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(x''-x')}{l'}\,\delta x'' + \frac{(x'-x'')}{l'}\,\delta x' + \frac{(y''-y')}{l'}\,\delta y'' + \\ &+ \frac{(y'-y'')}{l'}\,\delta y' + \frac{(z''-z')}{l'}\,\delta z'' + \frac{(z'-z'')}{l'}\,\delta z' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Multiplicando, respectivamente, por λ e μ as equações (15) e (16), vem :

$$\lambda\left(\frac{x'-x}{l}\right)\delta x' + \lambda\left(\frac{x-x'}{l}\right)\delta x + \lambda\left(\frac{y'-y}{l}\right)\delta y' +$$

$$+\lambda\left(\frac{y-y'}{l}\right)\delta y + \lambda\left(\frac{z'-z}{l}\right)\delta z' + \lambda\left(\frac{z-z'}{l}\right)\delta z = 0,$$

$$\mu\left(\frac{x''-x'}{l'}\right)\delta x'' + \mu\left(\frac{x'-x''}{l'}\right)\delta x' + \mu\left(\frac{y''-y'}{l'}\right)\delta y'' +$$

$$+\mu\left(\frac{y'-y''}{l'}\right)\delta y' + \mu\left(\frac{z''-z'}{l'}\right)\delta z'' + \mu\left(\frac{z'-z''}{l'}\right)\delta z' = 0.$$

Sommando estas equações á equação geral

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0,$$

resultará a equação seguinte:

$$\left(X + \lambda \frac{x' - x}{l}\right) \delta x + \left(Y + \lambda \frac{y' - y}{l}\right) \delta y + \left(Z + \lambda \frac{z' - z}{l}\right) \delta z +$$

$$+ \left(X' + \lambda \frac{x - x'}{l} + \mu \frac{x' - x''}{l'}\right) \delta x' + \left(Y' + \lambda \frac{y - y'}{l} +\right.$$

$$\left. + \mu \frac{y' - y''}{l'}\right) \delta y' + \left(Z' + \lambda \frac{z - z''}{l} + \mu \frac{z' - z''}{l'}\right) \delta z' + \left(X'' +\right.$$

$$\left. + \mu \frac{x'' - x'}{l'}\right) \delta x'' + \left(Y'' + \mu \frac{y'' - y'}{l'}\right) \delta y'' +$$

$$+ \left(Z'' + \mu \frac{z'' - z'}{l'}\right) \delta z'' = 0.$$

Para que esta equação tenha logar será evidentemente preciso que sejam separadamente nullos os coefficientes das variações das coordenadas; d'onde as equações seguintes:

$$X + \lambda \frac{x' - x}{l} = 0,\; Y + \lambda \frac{y' - y}{l} = 0,\; Z + \lambda \frac{z' - z}{l} = 0, \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} X' + \lambda \frac{x - x'}{l} + \mu \frac{x' - x''}{l'} = 0,\; Y' + \lambda \frac{y - y'}{l} + \\ + \mu \frac{y' - y''}{l'} = 0,\; Z' + \lambda \frac{z - z'}{l} + \mu \frac{z' - z''}{l'} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$X'' + \mu \frac{x'' - x'}{l'} = 0,\; Y'' + \mu \frac{y'' - y'}{l'} = 0,\; Z'' + \mu \frac{z'' - z'}{l'} = 0. \quad (19)$$

253. Tratemos agora da eliminação dos multiplicadores λ e μ. Ajuntando respectivamente as equações do grupo (17) ás do grupo (18) e ás do grupo (19), teremos:

$$\left.\begin{aligned} X + X' + X'' = 0, \\ Y + Y' + Y'' = 0, \\ Z + Z' + Z'' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Ajuntando respectivamente as equações do grupo (18) ás do grupo (19), virão as equações :

$$X' + X'' + \frac{\lambda}{l}(x - x') = 0,$$

$$Y' + Y'' + \frac{\lambda}{l}(y - y') = 0,$$

$$Z' + Z'' + \frac{\lambda}{l}(z - z') = 0;$$

das quaes, eliminando λ, teremos :

$$\left.\begin{aligned} Y' + Y'' - \frac{y - y'}{x - x'}(X' + X'') = 0, \\ Z' + Z'' - \frac{z - z'}{x - x'}(X' + X'') = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

e eliminando, finalmente, μ das equações do grupo (19), resultarão as equações :

$$\left.\begin{aligned} Y'' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} X'' = 0, \\ Z'' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'} X'' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

254. As tres equações do grupo (20) reunidas ás duas do grupo (21) e ás duas do grupo (22) serão as sete equações proprias ao equilibrio e á figura do systema funicular considerado. E estas sete equações reunidas ás duas equações (14) serão sufficientes para a determinação dos tres vertices M, M', M'' no espaço.

Si o polygono fosse composto de quatro vertices, teriamos evidentemente nove equações de equilibrio, as quaes, reunidas ás tres equações que definissem a ligação d'esses pontos, seriam sufficientes para fazer-nos conhecer a disposição mutua dos quatro pontos considerados.

Em geral, si o polygono fosse composto de n vertices teriamos $(2\,n + 1)$ equações de equilibrio, as quaes, reunidas

ás $(n - 1)$ equações de ligação, seriam $3\,n$ equações proprias a fazer conhecer a figura do systema funicular considerado.

255. Avaliemos agora as forças provenientes da reacção do fio. As equações (14),

$$L = l - \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z - z)^2} = 0,$$

$$M = l' - \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2} = 0,$$

dão-nos as derivadas parciaes seguintes:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x - x'}{l}, \quad \frac{dL}{dy} = \frac{y - y'}{l}, \quad \frac{dL}{dz} = \frac{z - z'}{l};$$

$$\frac{dL}{dx'} = \frac{x' - x}{l}, \quad \frac{dL}{dy'} = \frac{y' - y}{l}, \quad \frac{dL}{dz'} = \frac{z' - z}{l};$$

$$\frac{dM}{dx'} = \frac{x' - x''}{l'}, \quad \frac{dM}{dy'} = \frac{y' - y''}{l'}, \quad \frac{dM}{dy'} = \frac{z' - z''}{l'};$$

$$\frac{dM}{dx''} = \frac{x'' - x'}{l'}, \quad \frac{dM}{dy''} = \frac{y'' - y'}{l'}, \quad \frac{dM}{dz''} = \frac{z'' - z'}{l'};$$

d'onde

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2} = \lambda,$$

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2} = \lambda,$$

$$\mu \sqrt{\left(\frac{dM}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz'}\right)^2} = \mu,$$

$$\mu \sqrt{\left(\frac{dM}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz''}\right)^2} = \mu;$$

isto é, que o ponto M recebe, pela acção de M' e M'', uma força λ normalmente dirigida sobre a superficie representada pela equação $L = o$, cujas unicas variaveis são (x, y, z); o ponto M' recebe pela acção de M uma força λ normalmente dirigida sobre a superficie representada pela equação $L = o$,

cujas unicas variaveis são (x', y', z'); e recebe pela acção de M'' uma força μ normalmente dirigida sobre a superficie representada pela equação $M = o$, cujas unicas variaveis são (x', y', z'); e o ponto M'' recebe pela acção de M e M' uma força μ normalmente dirigida sobre a superficie definida pela equação $M = o$, cujas unicas variaveis são (x'', y'', z'').

Ora, as superficies definidas pelas equações $L = o$, $M = o$ são superficies esphericas, cujos raios acham-se representados por l e l'; por consequencia, as forças λ e μ serão sempre dirigidas segundo os raios d'estas espheras, isto é, segundo os lados do polygono funicular considerado.

« E' evidente que a força λ produzida no primeiro ponto, segundo a direcção do fio que une este ponto ao seguinte, e a força igual a λ, mas directamente contraria, que actua sobre o segundo ponto, na direcção do mesmo fio, só podem ser as forças que resultam da reacção d'este fio sobre os dois pontos, isto é, da tensão que soffre a parte do fio interceptada entre o primeiro e o segundo ponto, de sorte que o coefficiente λ exprimirá a quantidade d'esta tensão.

« Do mesmo modo o coefficiente μ exprimirá a tensão da parte do fio interceptada entre o segundo e o terceiro ponto, e assim por diante ». (Lagrange, *Mec. Analyt.*)

3. CATENARIA

256. Afim de que possamos comprehender a extensão do methodo geral (238) aos systemas continuos, occupemo-nos em particular da *catenaria*, que póde servir de typo para o estudo de muitos outros problemas; e como em todos estes problemas a questão consiste principalmente na determinação da figura conveniente ao systema, no caso de equilibrio, limitemo-nos a procurar a equação da *catenaria*, isto é, da curva que affecta, no estado de equilibrio, um fio homogeneo, inextensivel e perfeitamente flexivel, ligado por seus dois extremos a dois pontos fixos e sujeito á acção exclusiva da gravidade.

Todas as forças applicadas aos pontos do fio em equilibrio, sendo simplesmente os pesos de seus pontos materiaes,

a curva que elle affecta será evidentemente situada em um plano vertical.

N'este plano (fig. 100), por um ponto O tracemos dois eixos rectangulares Ox e Oy coordenados. Seja o eixo Ox horizontal e dirigido do lado em que acha-se situado o ponto fixo A e o eixo Oy vertical, dirigido em sentido contrario ao da gravidade e passando pelo ponto B, que é supposto ser o mais baixo da curva.

Designemos por (x, y) as coordenadas OP e PM de um ponto qualquer M e por s o arco BM da catenaria. Sejam, finalmente, (x', y'), (x'', y'') as coordenadas dos dois extremos A e C fixos d'esta curva.

Isto posto, tomemos a equação geral da estatica

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = o. \qquad (23)$$

Por ser o peso do fio a unica força exterior considerada, teremos:

$$X = o,\; Z = o,\; Y = -\,g\,dm,$$

sendo dm a massa de um qualquer dos pontos materiaes do fio e g a força da gravidade; d'onde a equação (23) se mudará na seguinte;

$$\int (g\,dm)\,\delta y = o\,; \qquad (24)$$

o signal Σ não podendo ter mais logar porque trata-se de uma somma de elementos differenciaes.

Imaginando que o fio em equilibrio seja dividido em um numero infinito de elementos tendo todos o mesmo comprimento infinitamente pequeno ds, a unica condição de ligação d'estes elementos será expressa pela equação $ds = constante$; d'onde

$$\delta.\,ds = o.$$

Portanto, a equação (24) se mudará na seguinte:

$$\int (g\,dm)\,\delta y + \int \lambda\,\delta ds = o, \qquad (25)$$

que será a nossa equação geral de equilibrio.

Por ser

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

teremos:

$$\delta . ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta . dy ;$$

d'onde

$$\lambda \delta ds = \frac{\lambda dx}{ds} \delta dx + \frac{\lambda dy}{ds} \delta dy ;$$

portanto,

$$\int \lambda \delta . ds = \int \frac{\lambda dx}{ds} \delta . dx + \int \frac{\lambda dy}{ds} \delta . dy = \int \frac{\lambda dx}{ds} d . \delta x +$$

$$+ \int \frac{\lambda dy}{ds} d \delta \lambda = \left(\frac{\lambda dx}{ds} \delta x + \frac{\lambda dy}{ds} \delta \lambda + K \right) -$$

$$- \int \left[\left(d \frac{\lambda dx}{ds} \right) \delta x + \left(d \frac{\lambda dy}{ds} \right) \delta y \right],$$

sendo K uma constante arbitraria, resultante da integração feita. Substituindo este valor na equação (25), vem:

$$\int (gdm) \delta y + \left(\frac{\lambda dx}{ds} \delta x + \frac{\lambda dy}{ds} \delta y + K \right) -$$

$$- \int \left[\left(d \frac{\lambda dx}{ds} \right) \delta x + \left(d \frac{\lambda dy}{ds} \right) \delta y \right] = 0,$$

ou

$$\left(\frac{\lambda dx}{ds} \delta x + \frac{\lambda dy}{ds} \delta y + K \right) +$$

$$+ \int \left[\left((gdm) - d \frac{\lambda dy}{ds} \right) \delta y - \left(d \frac{\lambda dx}{ds} \right) \delta x \right] = 0 ;$$

d'onde as duas equações seguintes:

$$\frac{\lambda dx}{ds} \delta x + \frac{\lambda dy}{ds} \delta y + K = 0, \quad (26)$$

$$\left(gdm - d \frac{\lambda dy}{ds} \right) \delta y - \left(d \frac{\lambda dx}{ds} \right) \delta x = 0. \quad (27)$$

Evidentemente a equação (26) é inteiramente superflua por serem suppostos fixos os limites do fio; assim, considerando sómente a equação (27), teremos a equação seguinte:

$$\left(d\frac{\lambda\, dy}{ds} - gdm\right)\delta\, y + \left(d\frac{\lambda\, dx}{ds}\right)\delta\, x = 0\,;$$

d'onde, para que esta equação tenha logar, será necessario que os coefficientes das variações arbitrarias δx e δy sejam separadamente nullos, isto é, que

$$d\frac{\lambda\, dy}{ds} - gdm = 0,\ d\frac{\lambda\, dx}{ds} = 0;$$

d'onde

$$\frac{\lambda\, dy}{ds} = \int gdm,\ \frac{\lambda\, dx}{ds} = c, \qquad (28)$$

sendo c uma constante arbitraria.

257. No ponto B, o mais baixo da curva, e tomado para origem dos arcos s, o valor de ds se reduz simplesmente a dx; d'onde

$$\frac{dx}{ds} = 1;$$

portanto, $\lambda = c$ será o valor da tensão do fio n'esse ponto. Si, pois, designarmos a tensão no ponto B pelo peso de um comprimento h do fio, teremos, chamando p o peso da unidade de comprimento do mesmo fio,

$$c = ph.$$

Substituindo este valor na segunda das equações (28), virá

$$\frac{\lambda\, dx}{ds} = ph;$$

d'onde, chamando T a tensão λ em um ponto qualquer M do fio, teremos :

$$T = \lambda = ph\frac{ds}{dx}.$$

Eliminando λ entre as duas equações (28), virá:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{c}\int dm.$$

Ora, dm sendo a massa de um ponto material qualquer do fio, é claro que, chamando ω a espessura constante do fio, ω será a base d'um cylindro infinitamente pequeno cuja altura é ds; d'onde o volume $\omega\, ds$ será proporcional á massa dm, por ser supposto o fio homogeneo. Assim, a equação precedente será a mesma que a seguinte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\,\omega}{c}\int ds - \frac{g\,\omega}{c}\,.\,s,$$

sendo nulla a constante que resulta d'esta integração porque, no ponto B, temos simultaneamente

$$s = 0 \text{ e } \frac{dy}{dx} = 0.$$

A equação precedente dá-nos:

$$s = h\frac{dy}{dx},$$

por ser

$$h = \frac{c}{g\omega}.$$

As equações precedentes,

$$s = h\,\frac{dy}{dx} \text{ e } T = ph\,\frac{ds}{dx}, \qquad (29)$$

nos permittirão o conhecimento de um arco qualquer s e da tensão T correspondente, quando houvermos deduzido a equação finita da catenaria.

258. Differenciando a primeira das equações (29), teremos:

$$ds = h.\ d\,\frac{dy}{dx}\ ,$$

ou, por ser tambem

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\ ,$$

resultará a equação

$$\frac{1}{h}\ dx = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}\ ;$$

d'onde

$$\frac{x}{h} = \int\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

Fazendo

$$u = \frac{dy}{dx}\ ,$$

teremos:

$$\frac{x}{h} = \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Para integrar, façamos:

$$\sqrt{1+u^2} = v - u\ ;$$

d'onde

$$1 + u^2 = v^2 - 2\,u\,v + u^2,$$

ou

$$v^2 - 1 = 2\,v\,u\ ;$$

d'onde

$$u = \frac{v^2 - 1}{2\,v}, \quad du = \frac{(v^2 + 1)\,d\,v}{2\,v^2};$$

portanto,

$$\sqrt{1 + u^2} = \frac{v^2 + 1}{2\,v}.$$

Logo,

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{d\,v}{v} = lg.\ v;$$

d'onde

$$\frac{x}{h} = lg.\ v = lg.\ \left(\sqrt{1 + u^2} + u\right) = lg.\ \left(\frac{dy}{dx}\ \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right),$$

sendo nulla a constante da integração feita, por ser no ponto B

$$x = o \text{ e } \frac{dy}{dx} = o.$$

Designando e a base dos logarithmos de Neper, teremos:

$$e^{\frac{x}{h}} = \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}. \qquad (30)$$

Multiplicando esta equação pelo factor

$$e^{-\frac{x}{h}}\left(-\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right)$$

virá a equação

$$e^{-\frac{x}{h}} = -\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}. \qquad (31)$$

Sommando membro a membro as equações (30) e (31), teremos:

$$e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} = 2\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = 2\,\frac{ds}{dx};$$

d'onde

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)dx. \qquad (32)$$

Subtrahindo membro a membro as mesmas equações (30) e (31), virá:

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right)dx. \qquad (33)$$

Integrando as equações (32) e (33), teremos:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right), \\ y &= \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

sendo nullas as constantes d'estas intregraes porque, no ponto B, origem dos arcos, $s=o$ e $x = o$ verificam a primeira d'estas equações; e quanto á segunda, suppomos a origem O das coordenadas situada á distancia h abaixo do ponto B, de modo que $x = o$ e $y = h$ verifiquem a mesma equação. A segunda equação (34) é a equação rectilinea da catenaria, d'essa curva que Galileo estudou e confundio com a parabola, mas que Leibnitz ensinou a construir. A primeira equação (34) dá-nos o comprimento do arco correspondente a uma abscissa conhecida, o que nos mostra que a catenaria é uma curva rectificavel.

Esta curva goza de propriedades d'uma importancia capital e nós passamos a considerar algumas.

259. *Estudo das propriedades da catenaria.* — A equação da catenaria,

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

estabelecida sob a fórma mais simples, mostra-nos claramente que esta curva é symetrica em relação ao ponto B.

Comparando as equações (32), (33) e (34), resulta :

$$y = h\frac{ds}{dx}, \; s = h\frac{dy}{dx}; \qquad (35)$$

d'onde, por ser $ds^2 = dx^2 + dy^2$, teremos :

$$y^2 = s^2 + h^2. \qquad (36)$$

Projectando a ordenada $MP = y$ sobre a normal MN d'um ponto qualquer N da curva, conclue-se que esta projecção é constante e igual a h. De facto,

$$M\,K = y \cos P\,M\,K = \frac{y}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{ydx}{ds};$$

mas, da relação precedente

$$y = h\frac{ds}{dx},$$

deduz-se :

$$h = y\,\frac{dx}{ds};$$

logo,

$$M\,K = h = O\,B.$$

Projectando a ordenada $M\,P = y$ sobre a tangente $M\,T$ a um ponto qualquer M da curva, conclue-se que esta

projecção é igual ao arco $B\,M$, contado a partir do ponto B, o mais baixo da curva. Com effeito,

$$M\,I = I\,P\,tg\,M\,T\,N = M\,K\,tg\,M\,T\,N = h\,\frac{dy}{dx};$$

mas, da relação precedente

$$s = h\,\frac{dy}{dx},$$

conclue-se que

$$\frac{s}{h} = \frac{dy}{dx};$$

portanto,

$$M\,I = s = B\,M.$$

Substituindo os valores de s, h, e y na equação (36), virá:

$$M\,P^2 = B\,M^2 + O\,B^2;$$

isto é, que a ordenada $M\,P$ d'um ponto qualquer M da catenaria é a hypothenusa d'um triangulo rectangulo cujos cathetos são o comprimento do arco $B\,M$ e o parametro $O\,B$.

260. O raio de curvatura da catenaria é igual á normal $M\,N$, dirigida em sentido contrario. Para demonstrar, tomemos a segunda equação (35),

$$s = h\,\frac{dy}{dx}.$$

Differenciando-a, temos :

$$ds = hd\,\frac{dy}{dx};$$

mas, tambem

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

logo,

$$dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = h\,d\,\frac{dy}{dx} = h\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx;$$

portanto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h}\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{h}$$

Considerando a expressão conhecida do valor do raio de curvatura d'uma curva plana qualquer, em coordenadas rectangulares,

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

teremos :

$$\rho = h\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).$$

Por ser

$$y = h\frac{ds}{dx} = h\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = h\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

resultará :

$$\frac{y^2}{h^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2};$$

d'onde

$$\rho = \frac{y^2}{h}.$$

Mas da relação

$$y = MN \cos PMK = MN \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}},$$

obtem-se tambem

$$MN = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = y.\frac{y}{h} = \frac{y^2}{h};$$

portanto,

$$\rho = MN.$$

Quanto ao sentido do raio de curvatura, é claro que será contrario ao da normal MN, porque a curva não tem a sua concavidade dirigida para o eixo dos x e o raio de curvatura deve achar-se sempre n'esta concavidade. Que a curva é

convexa para o eixo dos x, mostra-nos immediatamente a sua equação differencial

$$ds = h\, d\,\frac{dy}{dx},$$

na qual s variando crescentemente com a abscissa x, a derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ será sempre positiva.

261. De todas as curvas planas que passam por dois pontos fixos e que gyram em torno de um eixo situado em seu plano, a catenaria é a que produz por sua revolução a superficie cuja área é menor que a que seria produzida por toda outra curva do mesmo comprimento, terminada nos mesmos pontos. Para demonstrar, sejam A e C (fig. 100) os dois pontos fixos, a recta Ox o eixo de revolução e AMC a curva procurada. Designemos por (x', y') e (x'', y'') as coordenadas rectangulas dos dois pontos A e C.

A superficie produzida pela revolução da curva AMC em torno do eixo Ox será :

$$S = 2\,\pi \int_{x''}^{x'} yds.$$

Para conhecermos a superficie de revolução minima, empregaremos as regras do calculo das variações. Differenciando com o signal δ, virá :

$$\frac{\delta S}{2\pi} = \delta \int_{x''}^{x'} yds = \int_{x''}^{x'} \delta\,(yds) = \int_{x''}^{x'} (\,\delta y.\, ds + y.\,\delta\, ds\,).$$

Por ser

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

teremos :

$$\delta\, ds = \frac{dx}{ds}\,\delta\, dx + \frac{dy}{ds}\,\delta\, dy\;;$$

d'onde

$$\frac{\delta S}{2\pi} = \int_{x''}^{x'} \left(\delta y \, . \, ds + y \frac{dx}{ds} \delta \, dx + y \, \frac{dy}{ds} \, \delta \, dy \right) .$$

Integrando, vem :

$$\int_{x''}^{x'} y \, \frac{dx}{ds} \, \delta \, dx = \int_{x''}^{x'} y \, \frac{dx}{ds} \, d . \, \delta x = y \, \frac{dx}{ds} \delta x - \int_{x''}^{x'} \delta x \, d \left(y \, \frac{dx}{ds} \right) ,$$

$$\int_{x''}^{x'} y \, \frac{dy}{ds} \, \delta \, dy = \int_{x''}^{x'} y \, \frac{dy}{ds} \, d . \, \delta y = y \, \frac{dy}{ds} \, \delta y - \int_{x''}^{x'} \delta \, y d \left(y \frac{dy}{ds} \right) .$$

Isto posto e designando K a constante das integrações effectuadas, teremos :

$$\frac{\delta S}{2\pi} = \left(y \frac{dx}{ds} \, \delta \, x + y \, \frac{dy}{ds} \, dy + K \right) -$$

$$- \int_{x''}^{x'} \left[\delta \, x d \left(y \, \frac{dx}{ds} \right) + \delta y \, d \left(y \, \frac{dy}{ds} \right) - \delta y . \, ds \right] =$$

$$= \left(y \, \frac{dx}{ds} \, \delta x + y \, \frac{dy}{ds} \delta y + K \right) + \int_{x''}^{x'} \left[\left(ds - d \left(y \, \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y - \right.$$

$$\left. - d \left(y \, \frac{dx}{ds} \right) \, \delta \, x \right] .$$

Ora, para que a funcção $\frac{\delta S}{2\pi}$ seja minima deverá ser

nulla a integral do segundo membro da equação precedente; d'onde

$$\int_{x''}^{x'} \left[\left(ds - d \left(y \frac{dy}{ds} \right) \right) \delta y - d \left(y \frac{dx}{ds} \right) \delta x \right] = 0 ;$$

portanto, para que esta equação possa ter logar, será preciso que sejam separadamente nullos os coefficientes de δx e δy, isto é, que:

$$d \left(y \frac{dx}{ds} \right) = 0 \,, \quad ds - d \left(y \frac{dy}{ds} \right) = 0.$$

A segunda d'estas equações é uma consequencia da primeira, por causa da identidade

$$d \left(y \frac{dx}{ds} \right) = \left[ds - d \left(y \frac{dx}{ds} \right) \right] \frac{dy}{dx}.$$

Com effeito, multiplicando por $\frac{dx}{ds}$ os dois membros d'esta expressão, ella tomará a fórma seguinte:

$$\frac{dx}{ds} \, d \left(y \frac{dx}{ds} \right) - dy + \frac{dy}{ds} \, d \left(y \frac{dy}{ds} \right) = o,$$

ou

$$y \left(\frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} \, d \frac{dy}{ds} \right) - dy + dy \left(\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} \right) = o,$$

que, evidentemente, é uma consequencia da relação conhecida

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1$$

e da sua differencial primeira

$$\frac{dx}{ds} \, d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} \, d \frac{dy}{ds} = o.$$

Portanto, consideremos sómente a equação

$$d\left(y\,\frac{dx}{ds}\right) = o.$$

Integrando-a, temos:

$$y\,\frac{dx}{ds} = h;$$

d'onde, por ser

$$ds = dx\,\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

virá:

$$y = h\,\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

d'onde,

$$dx = \frac{h\,dy}{\sqrt{y^2 - h^2}}.$$

Integrando, temos:

$$x = \int \frac{h\,dy}{\sqrt{y^2 - h^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{h^2} - 1}} = h\,lg\left(\frac{y}{h} + \sqrt{\frac{y^2}{h^2} - 1}\right) + h'.$$

Fazendo passar o eixo dos y pelo ponto mais baixo da curva, tem-se $h' = o$; d'onde

$$x = h\,lg\left(\frac{y}{h} + \sqrt{\frac{y^2}{h^2} - 1}\right);$$

ou

$$\frac{x}{h} = lg\left(\frac{y}{h} + \sqrt{\frac{y^2}{h^2} - 1}\right);$$

ou ainda, designando por e a base dos logarithmos de Neper,

$$e^{\frac{x}{h}} = \frac{y}{h} + \sqrt{\frac{y^2}{h^2} - 1}. \qquad (a)$$

Multiplicando os dois membros d'esta equação pelo factor

$$e^{-\frac{x}{h}}\left(\frac{y}{h}-\sqrt{\frac{y^2}{h^2}-1}\right),$$

teremos:

$$e^{-\frac{x}{h}}=\frac{y}{h}-\sqrt{\frac{y^2}{h^2}-1}. \qquad (b)$$

Sommando membro a membro as equações *(a)* e *(b)*, virá:

$$y=\frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}}+e^{-\frac{x}{h}}\right);$$

que é a equação da catenaria.

262. Resulta d'esta propriedade e da primeira regra de Guldin (179), que a catenaria é a curva que, nas mesmas condições que outra qualquer curva plana, tem o seu centro de gravidade mais baixo que é possivel ou o menos distante do eixo horizontal de revolução. Com effeito, pela primeira regra de Guldin, a superficie produzida tendo para medida o comprimento do arco multiplicado pela circumferencia descripta pelo centro de gravidade d'este arco, é claro que esta circumferencia será de raio o menor possivel no caso da superficie de revolução minima, que é o caso da catenaria.

263. *Tractoria d'Huyghens.*— A recta $M I$ (fig. 100) por ser igual ao arco $B M$, o ponto I pertencerá a uma evoluta da catenaria, cujo vertice B será da evoluta um ponto de reversão. Esta evoluta $E B E'$ é symetrica em relação ao eixo dos y, tangente ao vertice B, e o eixo dos x é a sua asymptota. A parte da tangente a esta curva comprehendida entre o ponto de contacto I e o ponto P no eixo dos x é constante e igual a h. Esta evoluta da

catenaria chama-se a *tractoria d'Huyghens*. Para estabelecer a equação d'esta curva, a sua sub-tangente PP_1 dá-nos:

$$P\,P_1 = y\ tg\ P\,I\,P_1 = y\,\frac{dx}{dy}\ ;$$

mas, tambem o mesmo triangulo rectangulo $P\,I\,P_1$ dá-nos :

$$P\,P_1 = \sqrt{h^2 - y^2}\ ;$$

d'onde

$$y\,\frac{dx}{dy} = \sqrt{h^2 - y^2}\ ;$$

ou

$$dx = \frac{dy\,\sqrt{h^2 - y^2}}{y}\ ;$$

portanto,

$$x = \int dy\,\sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1} = y\,\sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1} +$$

$$+ h^2 \int \frac{dy}{y^2\,\sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1}} + c\,.$$

Para effectuar a segunda integração, façamos $\frac{h^2}{y^2} = z^2$; d'onde

$$\int \frac{dy}{y^2\,\sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1}} = -\frac{1}{h}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = -$$

$$-\frac{1}{h}\,lg\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) = -\frac{1}{h}\,lg\left(\frac{h}{y} + \sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1}\right);$$

d'onde

$$x = y\,\sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1} - h\,lg\left(\frac{h}{y} + \sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1}\right) + c\ ;$$

ou, submettendo a variavel y ao radical e dividindo pelo parametro h,

$$\frac{x}{h} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - lg\left(\frac{h}{y} + \sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1}\right) + c\,.$$

Para $y = h$, x deve annullar-se no ponto B. Portanto, a constante c será nulla e teremos :

$$\frac{x}{h} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - lg\left(\frac{h}{y} + \sqrt{\frac{h^2}{y^2} - 1}\right).$$

Tal é a equação rectilinea da tractoria d'Huyghens sob a fórma mais simples.

264. *A tensão da catenaria em cada ponto é proporcional á ordenada d'este ponto.* — Com effeito, na segunda equação (29),

$$T = ph\,\frac{ds}{dx}\,,$$

substituindo o valor de $\frac{ds}{dx}$ tirado da primeira das equações (35),

$$y = h\,\frac{ds}{dx}\,,$$

teremos :

$$T = py\,.$$

No ponto B, por ser $y = OB = h$,

$$T = ph.$$

265. *Construcção da catenaria.* — Resta-nos a determinação do parametro h que acha-se na equação da catenaria, para que esta curva possa ser construida. Para isto, tracemos a vertical CD e as horizontaes AD e CG.

Sejam

$$AD = a,\ CD = b,\ ABC = l\,;$$

$$AQ = k,\ DQ = k',\ OB = h,\ BQ = f\,.$$

As tres quantidades a, b e l sendo dadas em cada caso em que se tenha de construir uma catenaria, calculemos as quantidades k, k', h e f.

Tomemos a primeira equação (34),

$$s = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

na qual substituamos o arco s por BA e a abscissa x por k, que é a abscissa do ponto A.

Virá:

$$BA = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k}{h}}\right).$$

Analogamente, teremos:

$$BC = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right);$$

d'onde, por ser $l = BA + BC$, resultará:

$$l = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k}{h}} + e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right). \quad (37)$$

Tomemos a segunda equação (34),

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

na qual substituamos a ordenada y por OQ e a abscissa x por k, coordenadas do ponto A.

Virá:

$$OQ = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} + e^{-\frac{k}{h}}\right).$$

Analogamente, entre as coordenadas do ponto C, teremos :

$$OG = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k'}{h}} + e^{-\frac{k'}{h}}\right);$$

d'onde, por ser $b = OQ - OG$, resultará :

$$b = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} + e^{-\frac{k}{h}} - e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right). \tag{38}$$

As equações (37) e (38) dão-nos :

$$\left.\begin{aligned} l + b &= h\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right), \\ l - b &= h\left(e^{\frac{k'}{h}} - e^{-\frac{k}{h}}\right); \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

d'onde, multiplicando membro a membro estas equações, teremos :

$$l^2 - b^2 = h^2\left(e^{\frac{a}{h}} + e^{-\frac{a}{h}} - 2\right) = h^2\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right)^2,$$

por ser $a = k + k'$.

Extrahindo a raiz quadrada, virá :

$$\sqrt{l^2 - b^2} = h\left(e^{\frac{a}{2h}} - e^{-\frac{a}{2h}}\right). \tag{40}$$

Fazendo

$$\frac{a}{2h} = \alpha, \sqrt{l^2 - b^2} = an,$$

a equação precedente se mudará na seguinte :

$$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2\,\alpha} = n\,;$$

mas, por causa dos desenvolvimentos em serie,

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.\ 2} + \frac{\alpha^3}{1.\ 2.\ 3} + etc.,$$

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.\ 2} - \frac{\alpha^3}{1.\ 2.\ 3} + etc.,$$

teremos :

$$e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 2\alpha\left(1 + \frac{\alpha^2}{1.\ 2.\ 3.} + \frac{\alpha^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} + etc.\right);$$

portanto,

$$\frac{\alpha^2}{1.\ 2.\ 3.} + \frac{\alpha^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} + etc. = n - 1. \qquad (41)$$

Esta quantidade n sendo dependente, por uma simples relação, de $a, b, l,$ será facilmente conhecida ; então a equação precedente fará conhecer o valor de α e a relação estabelecida entre h e α nos dará o valor de h. Para resolver a equação (41), notemos primeiro que $n > 1$.

Com effeito, da relação

$$\sqrt{l^2 - b^2} = an,$$

deduz-se

$$n = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a}\,;$$

mas, tirando a hypothenusa $A\,C$, teremos :

$$\frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a} > \frac{\sqrt{A\,C^2 - b^2}}{a}\,;$$

d'onde

$$n > \frac{\sqrt{A\,C^2 - b^2}}{a}\,;$$

mas do triangulo $A\,C\,D$ resulta :

$$a = \sqrt{A\,C^2 - b^2}\,;$$

portanto,

$$n > 1.$$

Como em todos os termos do primeiro membro da equação (41) entra a quantidade α, facilmente vemos que, para $\alpha = o$, este primeiro membro se annullará. Para $\alpha = \infty$, elle se reduzirá ao infinito. Portanto, e por ser este primeiro membro uma funcção continua de α, é claro que existirá um unico valor de α que verifica a equação (41), isto é, que torna o seu primeiro membro igual a $n - 1$.

Suppondo que o comprimento l do arco $A\ B\ C$ seja pouco superior ao da corda $A\ C$, resultará que n differirá muito pouco da unidade; portanto, a variavel α será diminuta. Podemos, pois, na equação (41) desprezar todos os termos da série que se acha no primeiro membro que contiverem potencias de α superiores á segunda; d'onde

$$\frac{\alpha^2}{1.\ 2.\ 3} = n - 1;$$

portanto,

$$\alpha = \sqrt{6\,(n-1)} = \sqrt{6\left(\frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{a} - 1\right)}.$$

Tal é o valor de α, que, substituido na equação

$$\frac{a}{2\,h} = \alpha\,,$$

nos permittirá o calculo do parametro h.

266. A primeira equação (39),

$$l + b = h\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{-\frac{k'}{h}}\right),$$

por ser

$$a = k + k',$$

se mudará em

$$l + b = h\left(e^{\frac{k}{h}} - e^{\frac{k-a}{h}}\right) = h\left(1 - e^{-\frac{a}{h}}\right)e^{\frac{k}{h}}\ ;$$

d'onde

$$a^{\frac{k}{h}} = \frac{l + b}{h\left(1 - e^{-\frac{a}{h}}\right)};$$

d'onde

$$k = \frac{h}{lg\ a}\ lg.\ \frac{l + b}{h\left(1 - e^{-\frac{a}{h}}\right)}.$$

Tal é o valor de k. Substituindo-o na relação

$$a = k + k',$$

facilmente determinaremos a constante k'.

Quanto á constante f, a sua determinação será immediata. Com effeito, tomemos a equação da catenaria

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Por ser

$$h = OB,\ f = BQ,\ OQ = h + f,$$

teremos, pela substituição das coordenadas do ponto A, em logar de y e x na equação precedente, a relação seguinte:

$$h + f = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} + e^{-\frac{k}{h}}\right);$$

d'onde, o valor f será:

$$f = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k}{h}} + e^{-\frac{k}{h}}\right) - h.$$

267. Si os dois pontos fixos A e C forem situados sobre a mesma horizontal AD, teremos $b = o$. N'este caso,

certamente o mais simples de todos, as fórmulas precedentes muito se simplificarão. As constantes k e k' serão iguaes e teremos :

$$k = k' = \frac{a}{2},$$

por ser a catenaria symetrica em relação á recta $B\,y$.

4. CURVA DAS PONTES PENSIS

268. No estudo da catenaria vimos que esta curva é a figura d'um fio uniformemente pesado, de espessura constante em que o peso de cada elemento é proporcional ao seu comprimento ds (257). Outros systemas funiculares existem em que os pesos dos elementos ds variam segundo outras leis.

Para exemplo, estudemos o caso da curva que forma a cadeia d'uma *ponte pensil* quando despreza-se o peso da propria cadeia por ser este caso de grande utilidade pratica.

Consideremos, pois, o caso particular em que o fio é de espessura variavel, isto é, em que a força vertical applicada aos pontos da curva, em logar de ser proporcional ao comprimento das partes d'esta curva, como na catenaria, é proporcional á projecção horizontal d'estas partes.

Supponhamos (fig. 101) um fio homogeneo $A\,B\,C$, suspenso a dois pontos fixos A e C cujos elementos são solicitados por forças verticaes, proporcionaes ás suas projecções sobre o eixo horizontal $B\,x$.

Evidentemente a curva formada pelo fio será plana e se achará situada no plano vertical traçado pelos pontos A e C. N'este plano, tracemos os dois eixos rectangulares $B\,x$ e $B\,y$.

Si T designa a tensão no ponto M e p a força que solicita uma parte da cadeia cuja projecção horizontal é igual á unidade linear, as equações (28) tomarão a fórma seguinte :

$$\frac{Tdy}{ds} = \int p dx, \quad \frac{Tdx}{ds} = c.$$

Designando por ph a tensão no ponto B, o mais baixo da curva, teremos:

$$c = ph;$$

portanto, as equações precedentes serão:

$$\frac{Tdy}{ds} = px + C, \qquad \frac{Tdx}{ds} = ph.$$

A constante C será nulla se tomarmos para a origem das coordenadas o ponto B, o mais baixo da curva, no qual a tangente é horizontal. Então, as equações serão:

$$\frac{Tdy}{ds} = px, \ \frac{Tdx}{ds} = ph; \qquad (A)$$

d'onde deduz-se:

$$xdx = hdy.$$

Integrando, teremos:

$$x^2 = 2\, hy.$$

equação de uma *parabola* cujo eixo é vertical e que terá o seu vertice no ponto B.

269. As componentes horizontal e vertical da tensão, dadas pelas equações *(A)*, nos permittem facilmente calcular o valor d'esta força em um ponto qualquer da curva. Calculando-a, pela regra do parallelogrammo, teremos:

$$T = \sqrt{\left(\frac{Tdx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{Tdy}{ds}\right)^2} = \sqrt{(ph)^2 + (px)^2} =$$

$$= p\sqrt{h^2 + x^2};$$

isto é, que a tensão total, igual a ph para $x = o$, cresce com a variavel x.

270. Resta-nos agora a determinação do parametro h que entra na equação da parabola $x^2 = 2\, hy$, para que esta

curva possa ser construida. Para isto, tracemos a vertical CD e as horizontaes AD e CG. Sejam

$$AD = a, \quad CD = b, \quad ABC = l\ ;$$

$$BQ = f, \quad AQ = k, \quad DQ = k'.$$

As tres quantidades a, b e l sendo dadas em cada caso em que se tenha de construir uma parabola, calculemos as quantidades f, k, k' e h.

Tomemos a equação

$$x^2 = 2\ hy$$

e n'ella substituamos successivamente as coordenadas dos pontos A e C.

Teremos:

$$k^2 = 2\ hf, \qquad (B)$$

$$k'^2 = 2\ h\ (f - b)\ ;$$

d'onde

$$2\ hb = k^2 - k'^2 = (k + k')\ (k - k') = a\ (k - k')\ ,$$

por ser

$$a = k + k'.$$

Portanto,

$$k - k' = \frac{2\ hb}{a},\ k + k' = a;$$

d'onde, estas equações dão-nos :

$$k = \frac{a}{2} + \frac{bh}{a},\ k' = \frac{a}{2} - \frac{bh}{a},$$

expressões por meio das quaes poderemos calcular os valor de k e k' quando houvermos determinado h. Conhecido valor de k a equação (B) dá-nos:

$$f = \frac{k^2}{2\ h}.$$

O valor de h será deduzido do comprimento l do fio. De facto, temos:

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = dx\sqrt{1+\frac{x^2}{h^2}} = \frac{1}{h}\,dx\sqrt{h^2+x^2};$$

d'onde, integrando, vem:

$$s = \frac{1}{h}\int dx\sqrt{h^2+x^2} = \frac{1}{h}\,x\sqrt{h^2+x^2} -$$

$$-\frac{1}{h}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{h^2+x^2}};$$

mas,

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{h^2+x^2}} = \int dx\sqrt{h^2+x^2} - h^2\int\frac{dx}{\sqrt{h^2+x^2}};$$

d'onde

$$\frac{1}{h}\int dx\sqrt{h^2+x^2} = \frac{1}{h}\,x\sqrt{h^2+x^2} -$$

$$-\frac{1}{h}\int dx\sqrt{h^2+x^2} + h\int\frac{dx}{\sqrt{h^2+x^2}};$$

d'onde

$$\frac{2}{h}\int dx\sqrt{h^2+x^2} = \frac{1}{h}\,x\sqrt{h^2+x^2} + h\int\frac{dx}{\sqrt{h^2+x^2}};$$

d'onde

$$2\int dx\sqrt{h^2+x^2} = x\sqrt{h^2+x^2} + h^2\int\frac{dx}{\sqrt{h^2+x^2}};$$

mas,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{h^2+x^2}} = \quad (x+\sqrt{h^2+x^2}) + C;$$

portanto,

$$2\int dx\sqrt{h^2+x^2} = x\sqrt{h^2+x^2} + h^2\,lg\,(x+\sqrt{h^2+x^2}) + C;$$

d'onde

$$s = \frac{x}{2h} \sqrt{h^1 + x^2} + \frac{h}{2} \; lg \; (x + \sqrt{h^2 + x^2}) + C.$$

Como $s = o$ para $x = o$, teremos :

$$0 = \frac{h}{2} \; lg \; h + C;$$

d'onde

$$C = - \frac{h}{2} \; l \, g \; h \; ;$$

portanto,

$$s = \frac{x}{2h} \sqrt{h^2 + x^2} + \frac{h}{2} \; lg \; (x + \sqrt{h^2 + x^2}) - \frac{h}{2} \; lg \; h.$$

Fazendo successivamente n'esta equação $x = k$, $x = k'$ e sommando as igualdades respectivas, vem :

$$l = \frac{k}{2\,h} \sqrt{h^2 + k^2} + \frac{h}{2} \; lg \, (k + \sqrt{h^2 + k^2}) +$$

$$+ \frac{k'}{2\,h} \sqrt{h^2 + k^2} + \frac{h}{2} \; lg \; (k' + \sqrt{h^2 + k'^2}) - h \; lg \; h \; ;$$

d'onde

$$2 \; h \; l = k \sqrt{h^2 + k^2} + h^2 \; lg \; (k + \sqrt{h^2 + k^2}) +$$

$$+ k' \sqrt{h^2 + k'^2} + h \; l \; g \; (k' + \sqrt{h^2 + k'^2}) - 2 \; h^2 \; lg \; h. \qquad (C)$$

Tal é a equação que tem de dar-nos o valor de h quando n'ella substituirmos os valores de k e k'.

Suppondo, para maior simplicidade, os dois pontos A e C situados em uma mesma recta horizontal, teremos :

$$b = 0, \; k = k' = \frac{a}{2}.$$

N'esta hypothese, a equação (C) será:

$$h\, l = k\sqrt{h^2 + k^2} + h^2\, lg\, \frac{k + \sqrt{h^2 + k^2}}{h}, \qquad (D)$$

da qual deduz-se, por ensaios, o valor approximado de h, depois de substituidos os valores de k e l.

A determinação do parametro h será mais facil quando o comprimento l da curva fôr muito pouco differente de sua projecção a. Com effeito, desenvolvendo em series os dois termos do segundo membro da equação *(D)*, teremos:

$$\sqrt{h^2 + k^2} = h + \frac{1}{2}\, \frac{k^2}{h} - \frac{1}{8}\, \frac{k^4}{h^3} + etc.,$$

$$lg\, \frac{k + \sqrt{h^2 + k^2}}{h} = \frac{k}{h} - \frac{1}{6}\, \frac{k^3}{h^3} + etc.;$$

d'onde, a equação *(D)* torna-se na seguinte:

$$hl = h^2 \left(\frac{k}{h} - \frac{1}{6}\, \frac{k^3}{h^3}\right) + k \left(h + \frac{1}{2}\, \frac{k^2}{h}\right),$$

desprezando os termos que contêm as potencias de k superiores á terceira potencia. Reduzindo, teremos:

$$h^2 \left(l - 2\, k\right) = \frac{1}{3}\, k^3;$$

d'onde, substituindo k por seu valor

$$k = \frac{a}{2},$$

virá:

$$h^2 = \frac{a^3}{24\,(l-a)} = \frac{2\, a^3}{48\,(l-a)} = \frac{a^2 .\ 2\, a}{16 . 3\,(l-a)};$$

d'onde, finalmente,

$$h = \frac{a\sqrt{2\, a}}{4\sqrt{3(l-a)}}.$$

Tal é o valor de h, na hypothese de ser l muito pouco differente de sua projecção horizontal a.

FIM DO TOMO PRIMEIRO.

IMPRENSA NACIONAL

IMPRENSA NACIONAL.

IMPRENSA NACIONAL.

E. Oliveira

MECANICA GERAL

Tomo I. Est. V.

IMPRENSA NACIONAL

IMPRENSA NACIONAL

E. O1

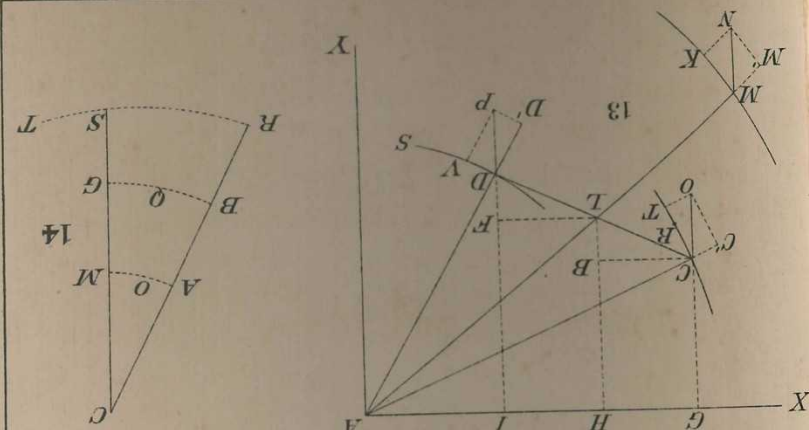
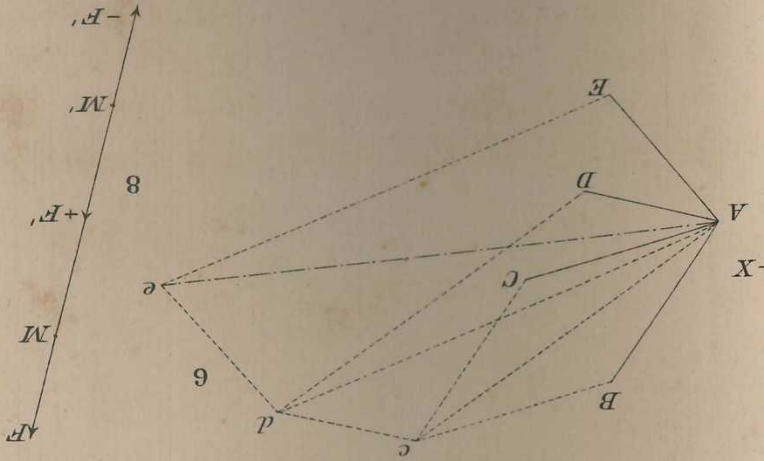
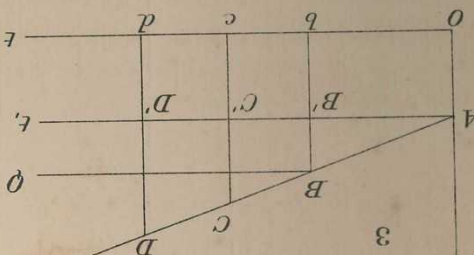
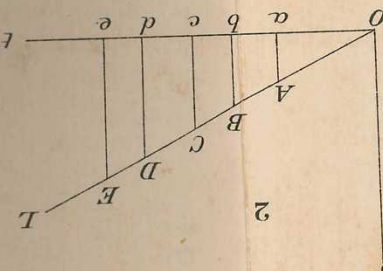
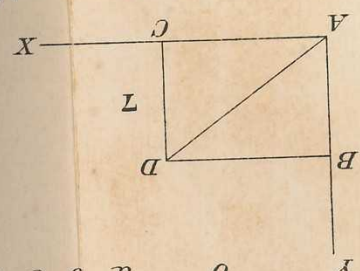
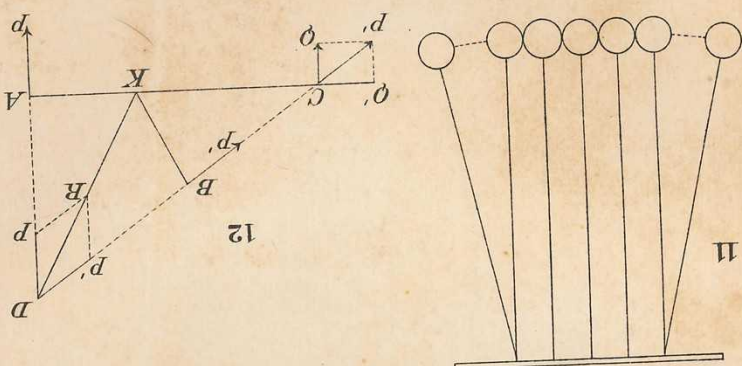
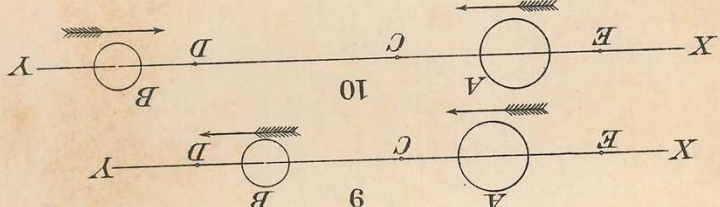
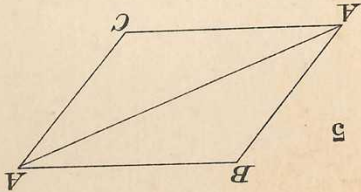
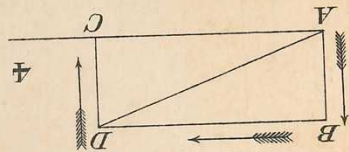
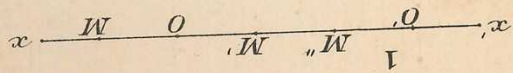
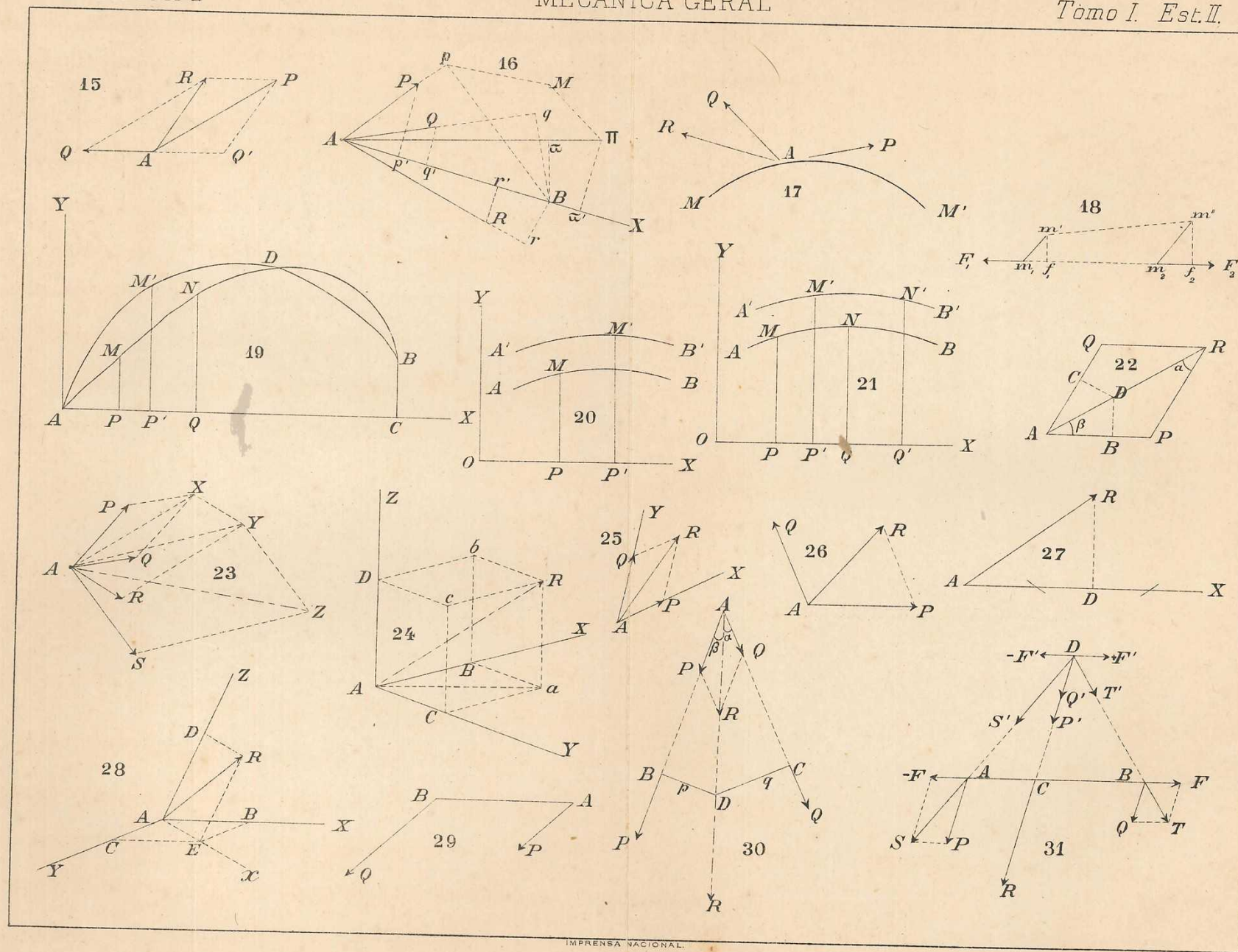
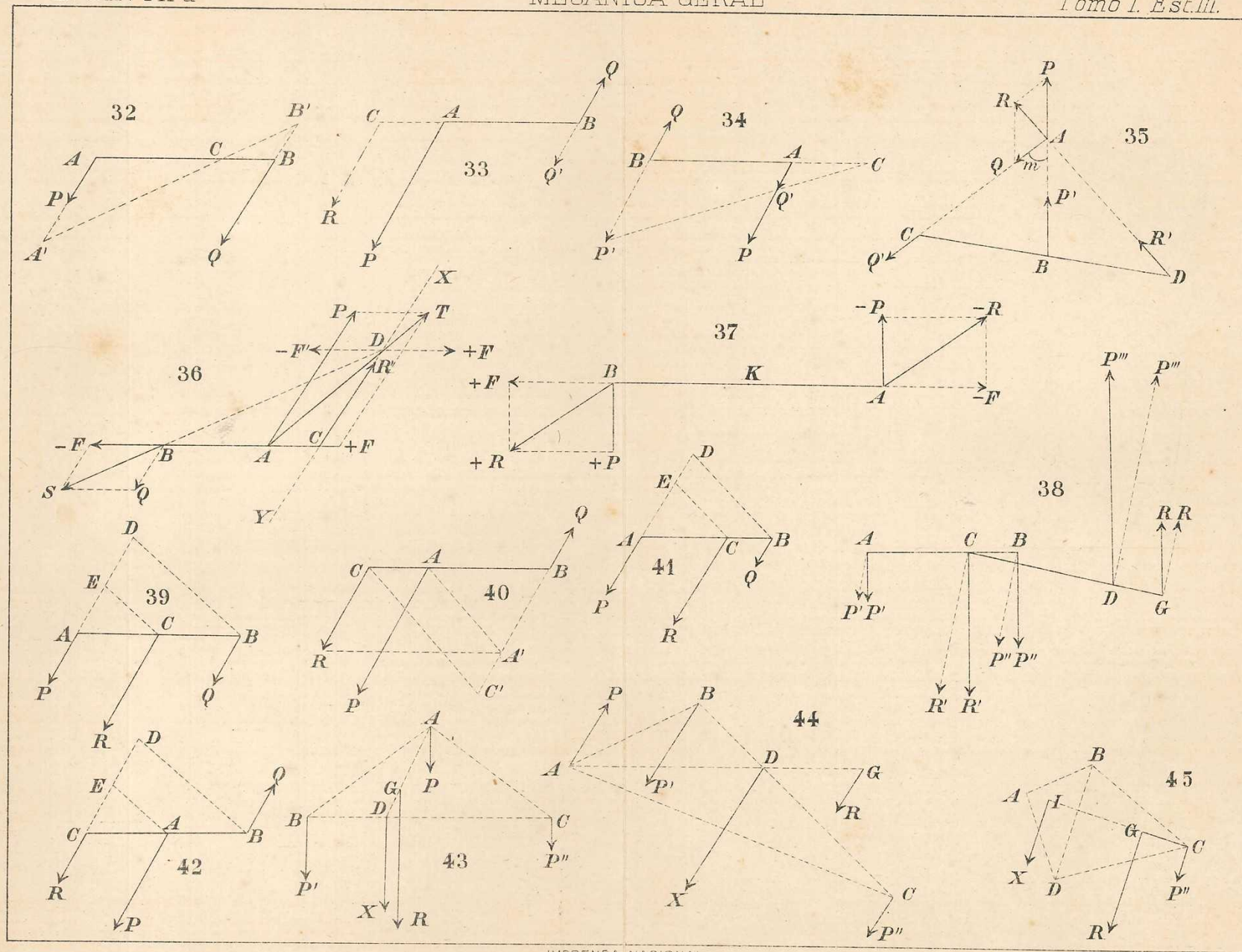
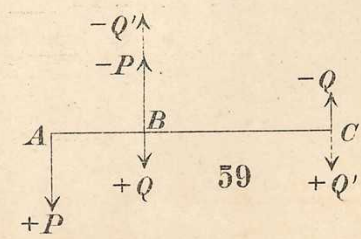
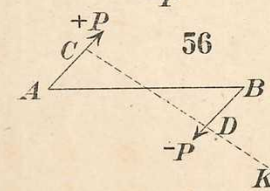
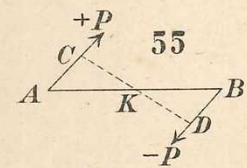
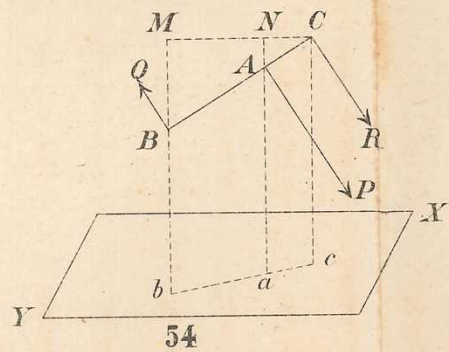
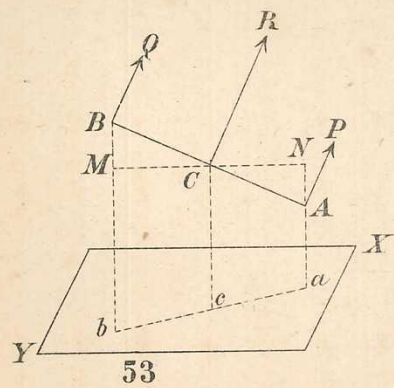
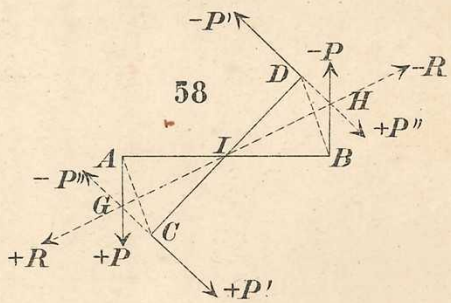
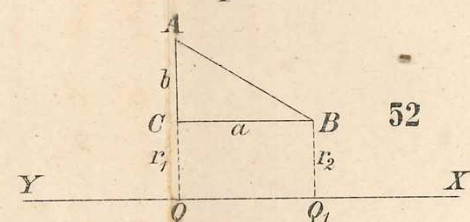
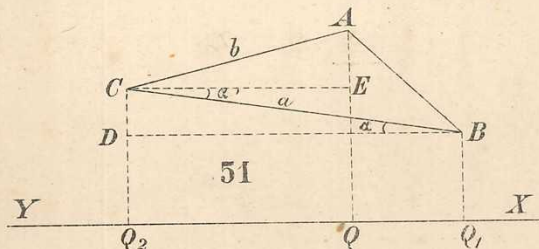
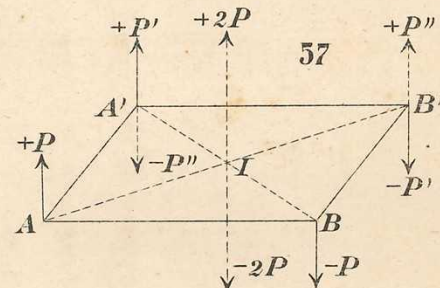
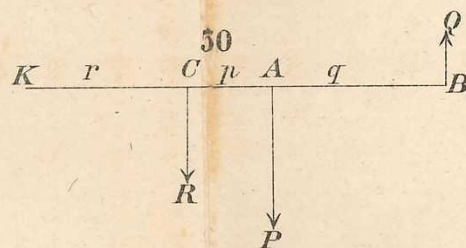
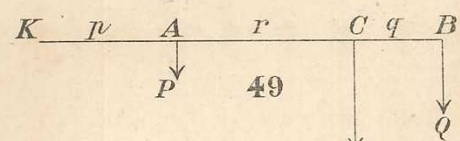
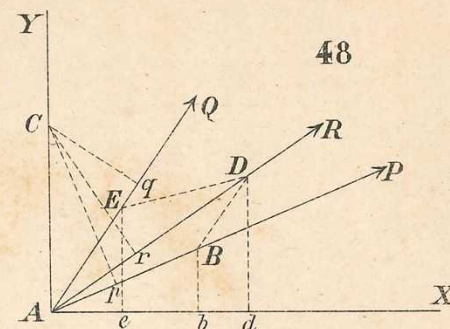
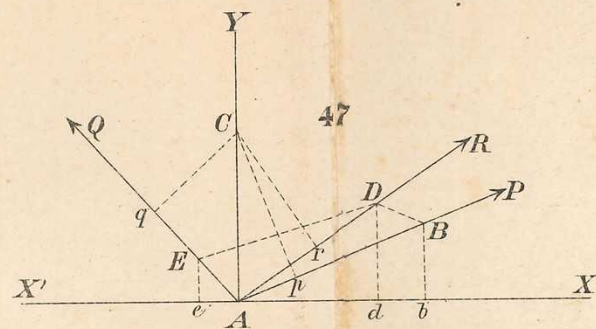
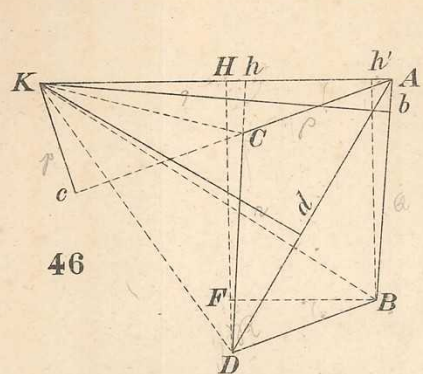
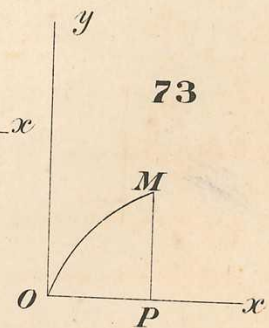
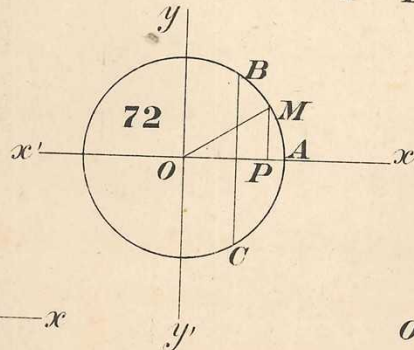
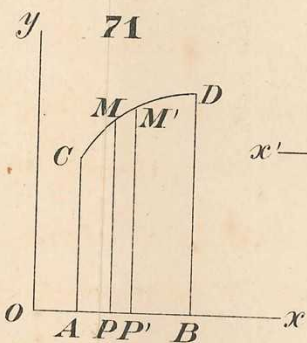
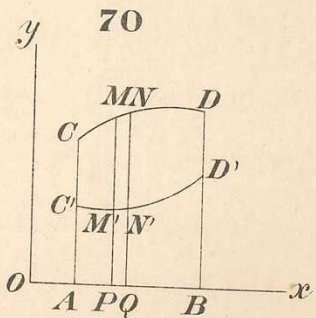
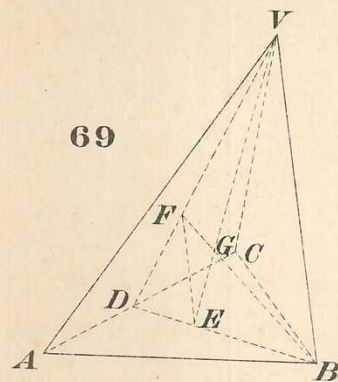
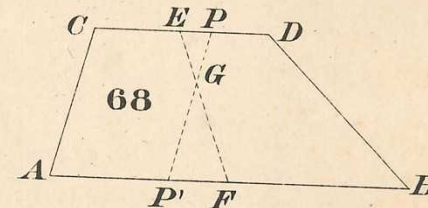
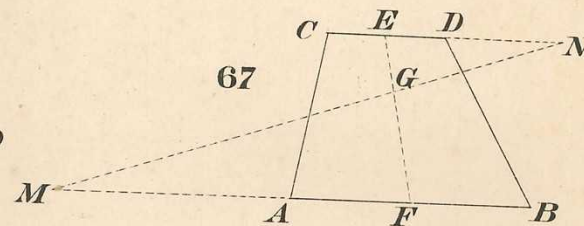
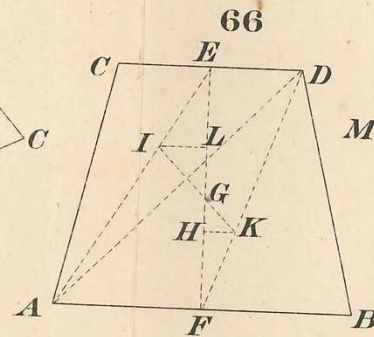
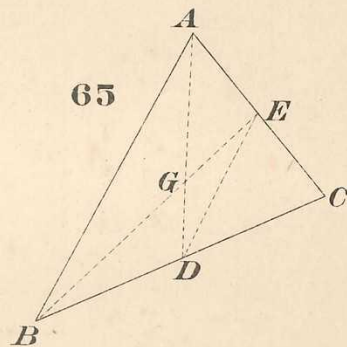
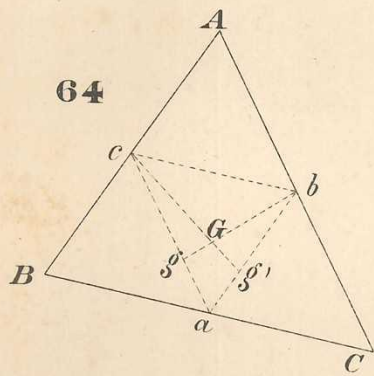
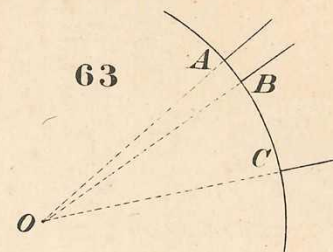
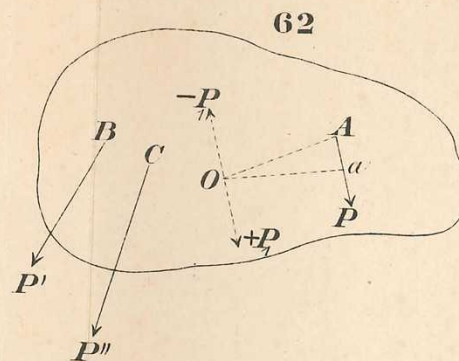
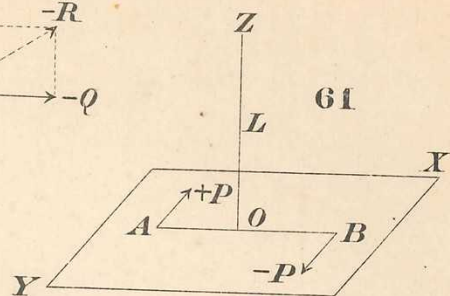
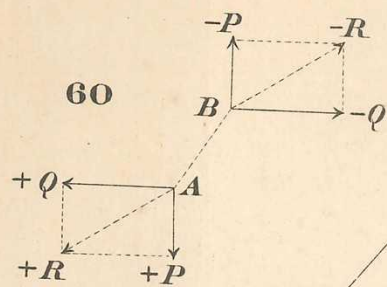
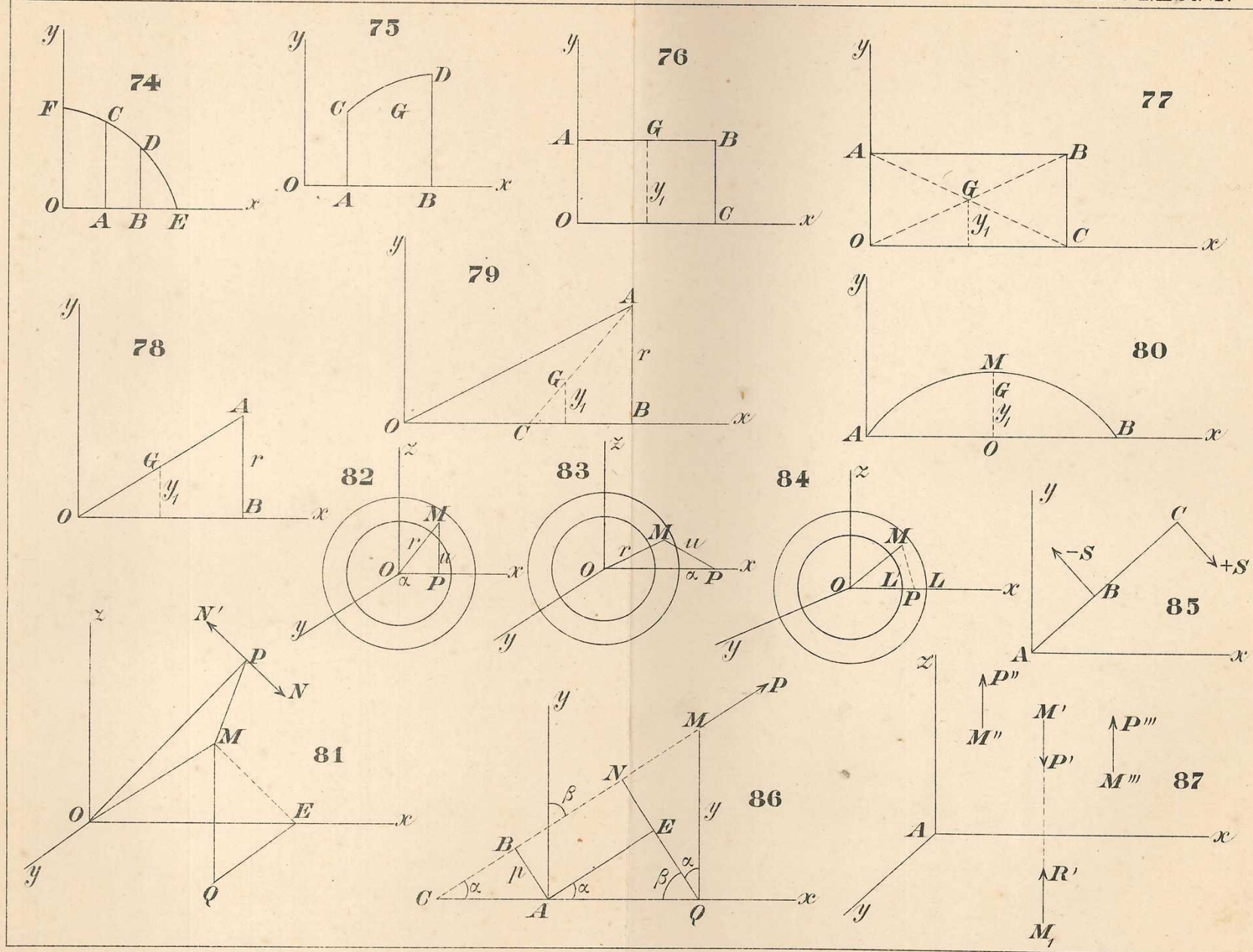
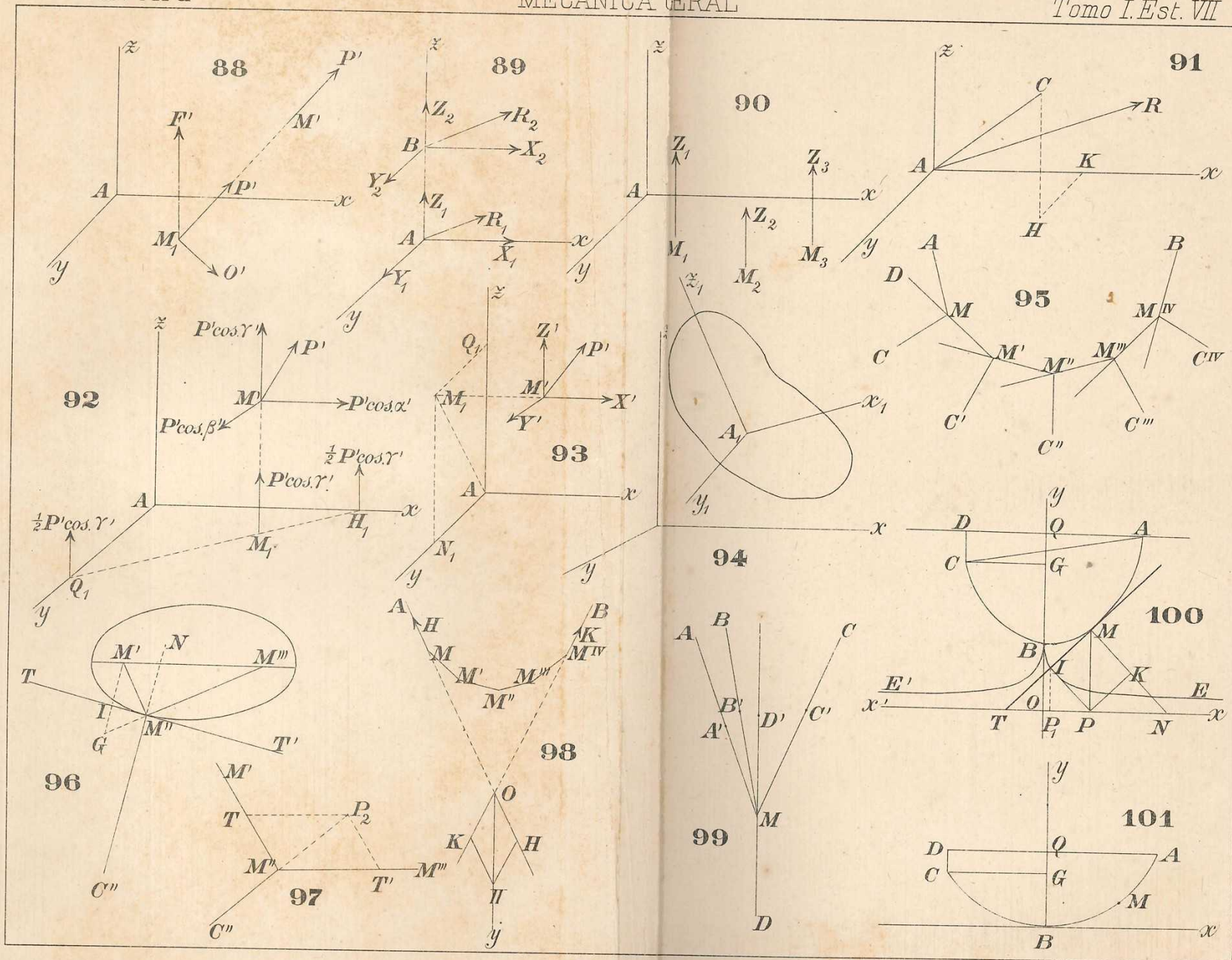
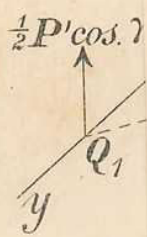
A

y

92

$\frac{1}{2}P'cos.$

Q_1

y

T

96

MECANICA GERAL

MECANICA GERAL

LIÇÕES PROFESSADAS

POR

J. Eulalio da Silva Oliveira

CAPITÃO DO ESTADO MAIOR DE 1ª CLASSE,
DOUTOR EM MATHEMATICA E SCIENCIAS PHYSICAS E LENTE
CATHEDRATICO DA ESCOLA MILITAR DO BRAZIL

SEGUNDA EDIÇÃO

TOMO SEGUNDO

RIO DE JANEIRO
IMPRENSA NACIONAL
1898

4384 — 98

Capital Fed.al, 10 de 8br.o de 1894

Ex.mo Sr. Dr. Cassiano Nascimento.

Afim de animar áquelles q. têm talento e illustração a produzirem trabalhos scientificos de geral utilidade, mas para cuja impressão faltão-lhe os recursos pecuniarios, como acontece com o distincto militar, Capitão Dr. José Eulalio da Silva Oliveira, peço-vos ordeneis a Imprensa Nacional a publicação das "Lições de Mecanica Geral dadas na Escola Superior de Guerra, pelo mesmo Capitão", e que mereceram juizo critico constante da nota que incluso vos remetto.

Com estima e consideração

Vosso

Mt.o Cam.da Am.o Obr.o

Floriano Peixoto

INDICE

PRIMEIRA PARTE

DYNAMICA DO PONTO MATERIAL

CAPITULO I

Theoria geral do movimento rectilineo

1. THEORIA DO MOVIMENTO VARIADO

2. THEORIA DO MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

3. THEORIA DYNAMICA DA GRAVIDADE

4. THEORIA DA ASSIMILAÇÃO DOS MOVIMENTOS

5. MEDIDA DA FORÇA MOTRIZ

6. EXEMPLOS DO MOVIMENTO RECTILINEO

CAPITULO II

Theoria do movimento de um systema variavel

CAPITULO III

Propriedades geraes do movimento

Arts. Pags.

CAPITULO IV

Theoria da rotação em torno de um eixo fixo

CAPITULO V

Theoria da rotação em torno de um ponto

PRIMEIRA PARTE

DYNAMICA DO PONTO MATERIAL

CAPITULO I

THEORIA GERAL DO MOVIMENTO RECTILINEO

1. THEORIA DO MOVIMENTO VARIADO

271. Vimos que a dynamica, a mais importante parte da mecanica geral, subdivide-se em dynamica do ponto material e dynamica dos systemas de corpos. Para estudarmos convenientemente o movimento de um ponto material devemos sobretudo considerar a sua trajectoria no espaço. Esta trajectoria só podendo ser rectilinea ou curvilinea, a dynamica do ponto material dará sómente logar a duas theorias geraes, em que serão estudados estes dois generos de movimentos.

O movimento rectilineo de um ponto material poderá ser de duas especies unicas: *uniforme* ou *variado*, conforme a sua velocidade seja constante ou variavel. Já fizemos, no preambulo geral da mecanica, ao instituirmos a lei de Kepler, o estudo do movimento rectilineo e uniforme, necessario á elaboração da estatica, porque corresponde esta parte da sciencia á theoria das forças instantaneas e por serem estas as forças que produzem os movimentos uniformes. Temos, pois, de fazer o estudo do movimento rectilineo e variado,

especie que ainda apresenta duas variedades: o movimento *accelerado* e o movimento *retardado*.

272. Supponhamos que seja dada a lei segundo a qual o espaço percorrido por um ponto material varia com o tempo de duração do movimento. Si a lei de um movimento é conhecida, será evidentemente traduzida por uma equação entre o espaço s e o tempo t, a qual poderá ser symbolicamente representada, de um modo geral, pela equação

$$s = f(t).$$

Esta equação conterá como casos particulares todas as especies de movimentos rectilineos e permittir-nos-ha o conhecimento de todas as propriedades e circumstancias do movimento. Suppondo-se que s e t variem continuamente, a equação precedente nem sempre será tal que s seja o espaço percorrido durante o tempo t; isto só terá logar quando essa equação fôr simultaneamente verificada por $t = o$ e $s = o$. Quando, pela hypothese de $t = o$, resultar para s um valor constante, a por exemplo, o espaço percorrido durante o tempo t será $s - a$; a constante a designará a distancia do movel a um ponto fixo tomado sobre a direcção do movimento, quando $t = o$.

O movimento rectilineo de um ponto material será completamente definido quando forem conhecidas a sua trajectoria e a lei segundo a qual o espaço percorrido pelo movel varia com o tempo de duração do movimento, isto é, quando forem conhecidas a trajectoria rectilinea definida pelas equações cartesianas

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,z + \alpha \\ y &= b\,z + \beta \end{aligned}\right\}$$

e a equação do movimento

$$s = f(t),$$

sobre a mesma trajectoria.

Supponhamos, por exemplo, que a recta AB (fig. 102) seja a trajectoria de um ponto material, cuja lei de movimento é dada pela equação

$$s = 10t - 4t^2$$

e seja o ponto O tomado para origem dos tempos e dos espaços, porque para $t = o$ esta equação dá-nos $s = o$.

Si quizermos conhecer a posição do movel no fim de dois segundos, façamos na equação precedente $t = 2$. Teremos $s = 4$. Assim, sobre AB, a partir do ponto O, tomemos um comprimento igual a quatro vezes a unidade linear ab e teremos no ponto M a posição do movel.

Si quizermos conhecer a posição occupada pelo movel no fim de tres segundos, façamos na equação do movimento $t = 3$. Teremos $s = -6$. Portanto, sobre AB, a partir do ponto O, no sentido opposto ao precedente, tomemos um comprimento igual a seis vezes a unidade arbitraria ab e teremos no ponto M' a posição do movel sobre a sua trajectoria.

273. Para construirmos a linha representativa do movimento definido por uma equação da fórma

$$s = f(t), \qquad (1)$$

sendo dados os valores do tempo, contados a partir do instante inicial, e os valores do espaço, contados a partir da origem dos espaços, adoptemos arbitrariamente as grandezas lineares que sejam convenientes para representar as unidades de tempo e espaço. Estas unidades, si forem iguaes em comprimento, muito facilitarão a questão.

Tracemos dois eixos rectangulares (fig. 103) Ot e Os. A partir do ponto O, tomemos uma abscissa OP representando a unidade de tempo ; o segundo, por exemplo. Levantemos pelo ponto P a perpendicular Pm, sobre a qual, em uma escala cuja unidade seja qualquer, tomemos um comprimento PM proporcional ao caminho percorrido pelo movel durante o primeiro segundo de tempo OP, espaço este

que será determinado pela equação (1) quando n'ella fizermos $t = 1$.

Iguaes á mesma unidade de tempo OP, tomemos os comprimentos PP', $P'P''$. $P''P'''$, etc. e, pelos pontos P', P'', P''', etc., elevemos as perpendiculares $P'm'$, $P''m''$, etc., sobre as quaes, na mesma escala adoptada para o espaço PM, tomemos os comprimentos $P'M'$, $P''M''$, etc., proporcionaes aos caminhos percorridos pelo movel durante os tempos OP', OP'', etc., espaços que serão determinados pela equação (1) quando n'ella fizermos respectivamente $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, etc.

Si unirmos por um traço continuo os pontos O, M, M', M'', etc., teremos a curva plana OA, que representará a imagem graphica do movimento traduzido algebricamente pela equação (*1*). E' a *curva dos espaços*, cujo traçado faz-nos claramente ver como os espaços variam com os tempos.

A curva dos espaços goza de algumas propriedades geraes. Entre outras, citaremos as seguintes:

Para cada valor dado do tempo, a curva admittirá sómente uma ordenada, porque o movel só poderá occupar uma posição unica. A curva dos espaços não poderá voltar sobre si mesma, porque o tempo crescerá sempre no mesmo sentido. Ella apresentará um traçado continuo, porque o movel não póde passar de uma posição á seguinte, sem passar por uma serie continua de posições intermediarias. Essa curva tem o seu traçado independente do da trajectoria do movel.

274. O movimento uniforme e rectilineo é um typo fundamental de movimento que a observação e a experiencio nos fornecem: é o movimento produzido por uma unica impulsão sobre um movel, quando acções externas não a modificam. Em um tal movimento, os espaços percorridos por um ponto material são proporcionaes aos tempos empregados em percorrel-os.

Quando esta relação entre os espaços e os tempos muda continuamente, o movimento chama-se *variado;* todo movimento rectilineo, que não é uniforme, é variado.

Para comprehendermos claramente o modo que a dynamica possue para estabelecer a theoria do movimento variado e rectilineo, concebamos que um ponto material seja continuamente submettido á acção d'uma força, de modo que o movel soffra em cada instante uma nova impulsão: sem estas acções successivas o movimento seria uniforme e rectilineo. A força actuando sem interrupção sobre o movel, podemos suppôr que os seus reiterados impulsos sejam separados entre si por tempos infinitamente pequenos. De facto, quando um movel é submettido a diversos choques consecutivos, o seu movimento é uniforme e rectilineo nos differentes intervallos; sómente cada impulsão nova fará o movel adquirir uma velocidade differente. Assim, a nossa hypothese leva-nos a reduzir um movimento variado e rectilineo qualquer a uma serie infinita de movimentos uniformes e rectilineos de velocidades differentes, que têm successivamente logar durante intervallos de tempo infinitamente pequenos.

275. Consideremos um ponto material animado d'um movimento variado e percorrendo uma trajectoria rectilinea AB (fig. 104). Sejam O a origem dos espaços e dos tempos, M e M' as posições occupadas pelo movel no fim dos tempos t e t'. O espaço percorrido durante o tempo $t'-t$ será representado por MM' e si este caminho fosse percorrido com um movimento uniforme, cuja velocidade constante fosse designada por v, teriamos:

$$v = \frac{OM' - OM}{t' - t} = \frac{MM'}{t' - t}.$$

Tal é a expressão da *velocidade média* entre os pontos M e M' no movimento variado e rectilineo. E', pois, *a velocidade média, a velocidade d'um movimento uniforme que, durante o tempo considerado, faria o movel percorrer o mesmo espaço que elle percorreria n'um movimento variado.*

276. Si imaginarmos que, no fim d'um tempo qualquer t, a força que actua continuamente sobre um ponto

material, n'uma mesma direcção, cessasse subitamente de agir, o movimento rectilineo do ponto tornar-se-ia immediatamente uniforme e a velocidade d'este movimento uniforme seria então produzida por uma força instantanea equivalente á somma de todas as impulsões elementares da força continua que actuava o movel, acções exercidas durante o tempo que precede o tempo t. E' esta velocidade, ou o espaço que o movel percorreria em cada unidade de tempo, que chama-se a *velocidade adquirida* no fim do tempo t; isto é, que *a velocidade adquirida pelo movel em cada instante é a velocidade do movimento uniforme, que teria logar si, a força continua cessando subitamente de agir, o movel sómente fosse animado da impulsão natural resultante do movimento já effectuado.*

Sejam, pois, v a velocidade adquirida no fim do tempo t e s o espaço descripto durante este tempo. Portanto, ds será o espaço descripto durante o tempo elementar dt com a velocidade v, isto é,

$$ds = vdt\ ;$$

d'onde,

$$v = \frac{ds}{dt}\ ;$$

isto é, que, *em um movimento variado e rectilineo qualquer, a velocidade adquirida em cada instante equivale á derivada do espaço, tomada em relação ao tempo.*

A relação precedente nos indica claramente que, si

$$s = f(t)$$

é a equação do movimento rectilineo e variado, resultará:

$$v = f'(t)\ ;$$

mas, si a equação do movimento fosse da fórma implicita

$$f(s, t) = o,$$

teriamos:

$$v = -\frac{\frac{df}{dt}}{\frac{df}{ds}}\,.$$

277. Seja (fig. 105) OMA a curva dos espaços definida pela equação

$$s = f(t).$$

Para construirmos a velocidade do ponto material no fim do tempo t, representado pela abscissa OP, procuremos conhecer a velocidade do movimento uniforme cujo espaço percorrido seja o elemento rectilineo ds a que pertence o ponto M da curva OA. Este movimento uniforme, de duração infinitamente pequena dt, si persistisse durante um tempo qualquer, effectuar-se-ia na direcção do prolongamento do mesmo elemento rectilineo ds, que é a direcção da tangente MT ao ponto M da curva dos espaços OA. Portanto, a questão estando reduzida á determinação da velocidade do movimento uniforme, cuja direcção é representada pela recta MT, façamos a construcção indicada (23).

Pelo ponto M tiremos uma recta MN parallela ao eixo Ot e d'uma grandeza igual á da linha adoptada para representar a unidade de tempo. Pelo ponto N tracemos NQ parallelamente ao eixo Os. A grandeza d'esta recta NQ será a da velocidade no fim do tempo t. Com effeito, adoptando a mesma grandeza linear MN para representar as unidades de tempo e espaço na construcção da curva dos espaços OA, teremos :

$$\frac{ds}{dt} = tg\ MTP;$$

mas o triangulo MTP dá-nos:

$$tg\ MTP = \frac{MP}{TP};$$

portanto,

$$v = \frac{MP}{TP};$$

mas, tambem os triangulos semelhantes MPT e QNM dão-nos:

$$\frac{MP}{TP} = \frac{NQ}{MN};$$

d'onde,

$$v = \frac{NQ}{MN};$$

mas, por ser

$$MN = 1,$$

teremos:

$$v = NQ,$$

como queriamos achar.

Si adoptassemos duas grandezas lineares differentes para representar as unidades de espaço e tempo, a velocidade em um instante qualquer não teria para valor a tangente trigonometrica do angulo que a tangente MT faz com o eixo das abscissas. Com effeito, as escalas das abscissas e das ordenadas sendo independentes entre si, o angulo MTP póde ser maior ou menor, para uma mesma velocidade, conforme varie uma d'estas escalas.

278. Si construirmos a velocidade em cada ponto da curva dos espaços,

$$s = f(t),$$

pelo methodo precedente, poderemos tambem obter uma segunda curva, que permittir-nos-ha o conhecimento da velocidade d'um ponto material em uma época qualquer: ella será a representação graphica da lei das velocidades do movimento, isto é, da equação

$$v = f'(t).$$

Sejam (fig. 106) dois eixos rectangulares Ot e Ov.

Determinemos as velocidades do ponto material no fim de 1, 2, 3... t segundos de tempo. Supponhamos que a abscissa Oa represente a unidade de tempo e que os tempos Oa, ab, bc, etc. sejam todos iguaes entre si. Pelos pontos a, b, c, *etc.* elevemos as perpendiculares am, bn, cp, *etc.*, respectivamente iguaes ás velocidades correspondentes aos tempos Oa, Ob, Oc, *etc.*

Unindo por um traço continuo as extremidades das ordenadas *am*, *bn*, *cp*, etc., obteremos um diagramma que será a curva representativa da velocidade: é a *curva das velocidades*.

279. Reciprocamente, conhecida a curva das velocidades, podemos construir a curva dos espaços. Com effeito, si

$$v = f'(t)$$

tambem

$$v = \frac{ds}{dt};$$

d'onde

$$ds = f'(t)\, dt;$$

portanto, integrando, vem:

$$s = s_0 + \int_0^t f'(t)\, dt = s_0 + f(t),$$

sendo $s = s_0$, quando $t = o$. Si $s_0 = o$, teremos:

$$s = f(t),$$

que é a equação da curva dos espaços.

280. A fórmula $v = \frac{ds}{dt}$, que exprime a velocidade d'um movimento rectilineo e variado qualquer, dá-nos não só a grandeza como tambem o sentido da velocidade em cada instante, por ser *ds* positivo ou negativo, conforme o movimento seja dirigido na curva dos espaços, no sentido do eixo positivo dos *s*, ou em sentido contrario. Quanto á direcção da velocidade em cada instante, será a mesma que a da trajectoria do movimento considerado.

Quando os impulsos da força continua que actua o movel são dirigidos no sentido do movimento, elles augmentam a sua velocidade e o movimento chama-se *accelerado*. Quando a força continua actua em sentido opposto ao do movimento, os seus impulsos diminuem a velocidade do movel e o movimento chama-se *retardado*. E como a velocidade é uma funcção do tempo,

$$v = f'(t),$$

vê-se claramente que ella cresce com o tempo no primeiro caso e diminue no segundo.

Chama-se *força acceleratriz*, ou simplesmente *acceleração*, a força continua que produz estas duas modalidades do movimento rectilineo e variado.

2. THEORIA DO MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

281. Consideremos o movimento uniformemente variado o mais simples dos movimentos variados. Em um tal movimento, a velocidade cresce ou decresce de quantidades iguaes em tempos iguaes, quaesquer que sejam estes tempos. Quando a velocidade augmenta proporcionalmente ao tempo, diz-se que o movimento é *uniformemente accelerado*; chama-se *uniformemente retardado* o movimento cuja velocidade diminue proporcionalmente ao tempo.

Faremos o estudo d'estas duas modalidades do movimento uniformemente variado, começando pela primeira.

282. Imaginemos um ponto material partindo do repouso, isto é, sem achar-se animado de velocidade inicial. Seja j o accrescimo de velocidade durante a unidade de tempo e designemos por v a velocidade adquirida no fim do tempo t. Em virtude da definição do movimento, teremos:

$$v = jt. \qquad (1)$$

A constante j, que designa o accrescimo de velocidade na unidade de tempo, é a *acceleração* do movimento.

Suppondo que o movel na origem dos tempos possuisse uma velocidade inicial v_0, a velocidade no fim do tempo t seria dada pela relação

$$v = v_0 + jt. \qquad (2)$$

283. Representemos graphicamente a lei das velocidades dada pela equação (1). Sejam (fig. 107) Os e Ot dois eixos rectangulares. Designemos pela abscissa Oa a unidade de tempo e supponhamos que os tempos Oa, ab, bc, cd, etc.

sejam todos iguaes entre si. Pelos pontos a, b, c, etc. elevemos as perpendiculares am, bn, cp, etc., respectivamente iguaes ás velocidades correspondentes aos tempos Oa, Ob, Oc, etc.

Unindo por um traço continuo as extremidades das ordenadas am, bn, cp, etc., obteremos a linha representativa das velocidades.

E, passamos a provar, este logar geometrico é uma linha recta.

Com effeito, em virtude da definição do movimento, teremos:

$$\frac{am}{Oa} = \frac{bn}{Ob} = \frac{cp}{Oc} = \text{etc.};$$

isto é, que os triangulos Oma, Onb, Opc, etc. serão todos semelhantes entre si; d'onde, os angulos mOa, nOb, pOc, etc. serão iguaes; portanto, os pontos O, m, n, p, etc. estarão todos sobre uma mesma linha recta OL.

Si o ponto material possuisse, na origem dos tempos O, uma velocidade v_0, representada pela ordenada OO', a linha das velocidades não passaria pelo ponto O e seria a recta $O'L'$: tal é o logar geometrico definido pela equação (2).

284. Por ser constante a acceleração, ella será graphicamente representada pela recta mn parallela ao eixo dos tempos, traçada a uma distancia d'este eixo igual á ordenada que dá-nos a grandeza da velocidade no fim da unidade de tempo, quando o ponto material é supposto partir do repouso.

285. Combinando as equações

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v = v_0 + jt,$$

deduz-se:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + jt;$$

d'onde,

$$ds = v_0\,dt + jtdt;$$

portanto, integrando, vem:

$$s = c + v_0 t + \frac{1}{2} jt^2$$

sendo c a constante devida á integração effectuada. Para determinal-a, basta fazermos $t = o$ n'esta equação: o valor de s correspondente a este valor de t será evidentemente o do espaço inicial, que representaremos por s_0.

Então teremos:

$$c = s_0;$$

portanto, a equação precedente tomará a fórma seguinte:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} jt^2. \qquad (3)$$

Esta equação é a mais geral do movimento uniformemente accelerado, por conter todas as constantes que determinam completamente o movimento.

Reciprocamente, si a relação entre o espaço e o tempo fosse dada por uma funcção da fórma

$$s = A + Bt + Ct^2,$$

o movimento seria uniformemente accelerado. Com effeito, por ser, em qualquer movimento variado,

$$v = \frac{ds}{dt},$$

teremos:

$$v = B + 2Ct;$$

isto é, que a velocidade cresce proporcionalmente ao tempo.

Si tomarmos para origem dos espaços o ponto de partida do movel, ou o logar em que o movel acha-se quando $t = o$, teremos:

$$s_0 = o;$$

d'onde a equação (3) se reduzirá á fórma seguinte:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} jt^2.$$

E tambem si a velocidade na origem dos tempos fosse nulla, ou si o movel partisse do repouso, teriamos:

$$v_0 = o;$$

portanto, a equação do movimento seria

$$s = \frac{1}{2}jt^2.$$

Si n'esta equação fizermos $t = 1$, virá:

$$s = \frac{1}{2}j;$$

d'onde,

$$j = 2s;$$

isto é, que *si o movel parte do repouso, a acceleração ou a força acceleratriz constante é igual ao dobro do espaço que o movel percorre durante a primeira unidade de tempo, sob a acção da mesma força*. Esta propriedade subsiste no caso em que a origem dos espaços é um ponto qualquer, comtanto que se tenha $v_0 = o$; porque a equação do movimento será:

$$s = s_0 + \frac{1}{2}jt^2,$$

na qual fazendo $t = 1$, teremos:

$$s = s_0 + \frac{1}{2}j.$$

d'onde,

$$j = 2(s - s_0).$$

286. Representemos o tempo t do movimento pela recta OE (fig. 108) e imaginemos que este tempo seja dividido em uma série de tempos muito curtos OA, AB, BC, CD, etc. Supponhamos que a velocidade adquirida pelo movel no fim do primeiro instante OA seja representada pela recta AA', tirada perpendicularmente á Ot. Pelos pontos O e A'

tracemos a linha das velocidades OE', que será a hypothenusa do triangulo $OE'E$, e supponhamos que as differentes velocidades do movel no fim dos tempos OB, OC, OD, etc. sejam respectivamente representadas pelas ordenadas BB', CC', DD', etc.

Considerando o tempo BC, vemos que durante este tempo o movel tem um movimento uniforme, cuja velocidade é igual á que elle possuia no fim do tempo anterior, representada por BB'; d'onde o espaço percorrido pelo movel durante o tempo BC será igual ao producto $BB'.BC$, que é a expressão da área rectangular $BB'bC$.

Considerando agora um outro instante de tempo CD, veremos que o espaço percorrido durante este tempo será igual ao producto $CC'.CD$, que é a expressão da área rectangular $CC'cD$.

Si considerassemos todos os instantes do tempo OE, chegariamos á conclusão de que o erro commettido pela substituição do espaço realmente percorrido pelo movel animado d'um movimento uniformemente accelerado, pela somma dos espaços percorridos com differentes movimentos uniformes, será tanto menor quanto maior fôr o numero de elementos do tempo OE, ou quanto menor fôr a grandeza d'estes differentes elementos. E como, si a grandeza d'estes differentes elementos fôr supposta infinitamente pequena, as áreas dos rectangulos $AA'aB$, $BB'bC$, etc. serão respectivamente equivalentes ás áreas dos trapesios $AA'B'B$, $BB'C'C$ etc., o espaço realmente percorrido pelo movel será igual á somma das áreas de todos estes trapesios elementares, isto é, será igual á área do triangulo rectangulo OEE'.

D'onde,

$$s = \frac{1}{2} OE.EE';$$

mas,

$$OE = t, EE' = v;$$

portanto,

$$s = \frac{1}{2} vt.$$

Por ser

$$v = jt,$$

resultará :

$$s = \frac{1}{2} jt^2,$$

que é, como já vimos, a mais simples das equações do movimento uniformemente accelerado.

Suppondo que o movel possuisse uma velocidade inicial v_0, representada pela ordenada á origem OO', o espaço percorrido no fim do tempo t seria composto da área rectangular $OO'FE$ e da área do triangulo $FO'E''$. E como este triangulo é igual ao triangulo EOE', teremos:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} jt^2.$$

287. Representemos graphicamente a lei dos espaços dada pela equação geral

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} jt^2.$$

Sejam (fig. 109) Os e Ot dois eixos rectangulares. Designemos pela abscissa Ob a unidade de tempo e supponhamos que os tempos Ob, bc, cd, etc. sejam todos iguaes entre si. Pelos pontos b, c, d, etc. elevemos as perpendiculares bB, cC, dD, etc., respectivamente iguaes aos espaços correspondentes aos tempos Ob, Oc, Od, etc.

Unindo por um traço continuo os pontos A, B, C, D, etc., obteremos a imagem graphica da lei do movimento definida pela equação precedente. A simples construcção nos indicará logo que esta curva é uma parabola do segundo grão, cujo eixo principal é uma parallela ao eixo dos espaços. A ordenada á origem OA é a distancia inicial designada por s_0. A tangente AT ao ponto A, cuja abscissa é nulla, será definida pela equação

$$e = s_0 + v_0 t,$$

chamando e a ordenada d'um qualquer de seus pontos; d'onde,

$$v_0 t = e - so = mq - OA = mq - mp,$$

sendo a recta AN tirada parallelamente ao eixo Ot; portanto,

$$v_0 t = pq.$$

Considerando um ponto qualquer M da curva dos espaços, a sua ordenada s constará de tres termos:

$$s_0,\ v_0 t \text{ e } \frac{1}{2} jt^2;$$

dos quaes os dois primeiros são representados respectivamente por mp e pq; portanto, por ser a ordenada s do ponto M igual á mM, o terceiro termo

$$\frac{1}{2} jt^2$$

será representado por qM; isto é, teremos:

$$\frac{1}{2} jt^2 = qM.$$

Examinando esta expressão, vemos que, si a tangente ao ponto A fosse tomada para eixo dos tempos Ot, a equação da curva dos espaços muito se simplificaria, pois que a ordenada d'um qualquer dos pontos d'esta curva constaria sómente do termo

$$\frac{1}{2} jt^2.$$

Isto nos leva a simplificar a equação da curva, para que a sua construcção seja mais facil. Para isto, designemos por t_1 e s_1 as coordenadas do vertice da parabola definida pela equação

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} jt^2,$$

ponto em que a velocidade adquirida será nulla, por ser a respectiva tangente uma parallela ao eixo dos tempos Ot. Fazendo, pois,

$$\frac{ds}{dt} = o,$$

teremos :

$$v_0 + jt = o\ ;$$

d'onde, por ser t_1 a abscissa do vertice,

$$t_1 = -\frac{v_0}{j}\ .$$

Substituindo este valor de t_1 na equação do movimento, resultará um valor para s, que designaremos por s_1, o qual será :

$$s_1 = s_0 - \frac{v_0^{\,2}}{2j}\ .$$

Isto posto, façamos um deslocamento da origem O para o ponto (s_1, t_1), vertice da parabola

$$s = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, j\, t^2.$$

Para isto, substituamos n'esta equação as variaveis s e t respectivamente por $s + s_1$ e $t + t_1$, isto é, por

$$s + s_0 - \frac{v_0^{\,2}}{2j}\ ,\ t - \frac{v_0}{j}\ .$$

Resultará :

$$s = \frac{1}{2}\, j\, t^2.$$

Tal é a equação da curva sob a sua fórma mais simples. Como vê-se, ella dá-nos :

$$t^2 = \frac{2}{j}\, s\ ,$$

que, evidentemente, representa uma parabola do segundo gráo, por serem as ordenadas s proporcionaes aos quadrados das abscissas t.

O eixo dos s é o eixo principal d'esta parabola e o eixo dos t é a tangente a seu vertice A. O parametro d'esta curva é $\frac{2}{j}$. Ella tem a sua convexidade dirigida para o eixo dos tempos, pois que o angulo que a tangente a cada ponto faz com este eixo augmenta constantemente.

288. Das equações do movimento uniformemente accelerado resultam corollarios muito importantes pela sua utilidade.

Citaremos os seguintes:

1.º Em um movimento uniformemente accelerado, a velocidade média entre dois instantes quaesquer é a média arithmetica das velocidades correspondentes a estes dois instantes.

Si s e s' designam os espaços percorridos no fim dos tempos t e t', teremos:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2,$$

$$s = s_0 + v_0 t' + \frac{1}{2} j t'^2;$$

d'onde, o espaço percorrido entre os instantes correspondentes aos tempos t e t' será:

$$s' - s = v_0 (t' - t) + \frac{1}{2} j (t'^2 - t^2);$$

portanto, a velocidade média será dada pela expressão seguinte:

$$\frac{s' - s}{t' - t} = v_0 + \frac{1}{2} j (t' + t);$$

mas, tambem si v e v' são as velocidades nos tempos t e t', teremos:

$$v = v_0 + j t,$$
$$v' = v_0 + j t';$$

d'onde, a média arithmetica d'estas velocidades será:

$$\frac{v + v'}{2} = v_0 + \frac{1}{2} j (t + t');$$

logo,

$$\frac{s' - s}{t' - t} = \frac{v + v'}{2}$$

como queriamos demonstrar.

2.º *Em um movimento uniformemente accelerado o espaço percorrido pelo movel no fim de um tempo qualquer é igual ao espaço que elle percorreria si fosse animado de um movimento uniforme, cuja velocidade fosse a média arithmetica entre as velocidades inicial e final.*

Com effeito, seja a equação do movimento

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} jt^2 ;$$

d'onde,

$$s - s_0 = (v_0 + \frac{1}{2} j t) t.$$

Por ser

$$v = v_0 + jt ,$$

teremos,

$$s - s_0 = \left[v_0 + \frac{1}{2} (v - v_0) \right] t ,$$

ou

$$s - s_0 = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t ,$$

como queriamos demonstrar.

A simples inspecção da figura 108 confirma-nos este resultado, pois que o espaço total percorrido no fim do tempo t sendo geometricamente representado pela somma das áreas do rectangulo $OO'FE$ e do triangulo $FO'E''$, torna-se equivalente á área do trapesio $OO'E''E$; portanto, em virtude da medida d'esta área, teremos :

$$s - s_0 - \left(\frac{EE'' + OO'}{2} \right) OE = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t ;$$

Si o movel partisse do repouso,

$$v_0 = o\ ;$$

d'onde,

$$s = s_0 + \frac{1}{2} vt\ .$$

E si a origem dos espaços coincidisse com a dos tempos,

$$s_0 = o :$$

d'onde,

$$s = \frac{1}{2} v\,t.$$

3.º *Em um movimento uniformemente accelerado, a velocidade adquirida pelo movel no fim d'um tempo qualquer é igual á média geometrica entre o espaço percorrido e o dobro da acceleração.*

Com effeito, tomemos as equações do movimento

$$v = j\,t,\ s = \frac{1}{2} j\,t^2.$$

Eliminando a variavel t, resultará:

$$v^2 = 2\,j\,s\ ;$$

d'onde, tirando a raiz quadrada,

$$v = \sqrt{2\,j\,s},$$

como queriamos provar.

4.º *Em um movimento uniformemente accelerado, o espaço percorrido durante um tempo qualquer é igual á differença dos quadrados das velocidades inicial e final, dividida pelo dobro da acceleração.*

Sejam as equações do movimento

$$v = v_0 + j\,t,\ s = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2} j\,t^2.$$

Eliminando a variavel t, teremos:

$$s - s_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2j},$$

como queriamos demonstrar.

Si o movel partisse do repouso,

$$v_0 = o;$$

d'onde,

$$s - s_0 = \frac{v^2}{2j}.$$

E si a origem dos espaços coincidisse com a dos tempos,

$$s_0 = o;$$

d'onde,

$$s = \frac{v^2}{2j},$$

que é a relação estabelecida no corollario precedente.

289. Feito o estudo do movimento uniformemente accelerado, tratemos agora do movimento uniformemente retardado.

Quando definimos esta modalidade do movimento rectilineo e uniformemente variado, dissemos que era o movimento cuja velocidade diminuia proporcionalmente ao tempo; mas, como um movimento não póde ser retardado sem que o movel houvesse sido animado d'uma velocidade inicial, o que não acontece quando o movimento é uniformemente accelerado, convém que digamos tambem que o movimento uniformemente retardado é aquelle cuja velocidade *inicial* diminue proporcionalmente ao tempo.

Sejam v_0 a velocidade inicial do movel e j a quantidade de que ella decresce em cada unidade de tempo.

A expressão do valor da velocidade v no fim do tempo t será, em virtude da definição do movimento, a seguinte:

$$v = v_0 - jt. \qquad (4)$$

Comparando esta fórmula com a da velocidade do movimento uniformemente accelerado,

$$v = v_0 + j t, \qquad (5)$$

vemos que a unica differença entre estes dois movimentos consiste em ser a acceleração j tomada com o signal contrario ao da velocidade inicial, no movimento uniformemente retardado.

E esta acceleração opposta á velocidade inicial chama-se *a força retardatriz* do movimento.

290. Representemos graphicamente a lei das velocidades, dada pela equação (4). Sejam (fig. 110) Os e Ot dois eixos rectangulares.

Tomemos sobre o eixo dos espaços Os um comprimento OO' representando a velocidade inicial v_0 e sobre o eixo dos tempos Ot tomemos os comprimentos OA, AB, BC, etc. representando os segundos de tempo successivamente decorridos desde o instante inicial do movimento.

Pelos pontos A, B, C, etc. elevemos as ordenadas Aa, Bb, Cc, etc., respectivamente iguaes ás velocidades correspondentes aos tempos OA, OB, OC, etc., velocidades estas que serão dadas pela equação (4) quando n'ella fizermos successivamente $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, etc.

Assim, a velocidade Aa, correspondente á unidade de tempo OA, será igual á $Oo' - A'a$, representando $A'a$ a acceleração j, tomada em sentido opposto ao da velocidade OO', isto é, de A' para A; a velocidade Bb, correspondente ao tempo OB, duplo de OA, será igual á $OO' - B'b$, representando $B'b$ o dobro da acceleração $A'a$; a velocidade Cc, correspondente ao tempo OC, triplo de OA, será igual á $OO' - C'c$, representando $C'c$ o triplo da acceleração $A'a$; e assim por diante.

Unindo as extremidades das ordenadas por esse modo obtidas, teremos a linha representativa das velocidades, que é a linha recta $O'L$.

No ponto L a velocidade v será nulla e no fim do tempo $t = OL$ o movel estará em repouso.

Para determinarmos, pois, o tempo no fim do qual a força retardatriz terá esgotado inteiramente a velocidade inicial do movel, façamos, na equação (4), $v = o$.

Teremos:

$$v_0 = j t;$$

d'onde,

$$t = \frac{v_0}{j}.$$

Si o movel partisse sem velocidade inicial do ponto L e fosse animado d'um movimento uniformemente accelerado, no tempo $t = OL$, a sua velocidade adquirida seria :

$$v = j t;$$

d'onde,

$$t = \frac{v}{j};$$

portanto, *no movimento uniformemente retardado, o tempo empregado por um movel para perder a sua velocidade inicial é exactamente o tempo que seria necessario, si, partindo do repouso e animado d'um movimento uniformemente accelerado, tivesse de adquirir essa mesma velocidade inicial.*

291. Por ser constante a acceleração, ella será graphicamente representada pela recta MN parallela ao eixo dos tempos, traçada a uma distancia d'este eixo igual á ordenada da velocidade no fim do primeiro segundo de tempo, quando o ponto material é supposto partir do repouso; mas, abaixo do eixo dos tempos, por ser a acceleração do movimento uniformemente retardado uma grandeza tomada em sentido opposto do da velocidade inicial do movel.

292. Combinando as equações

$$v = \frac{ds}{dt}, \; v = v_0 - jt,$$

deduz-se :

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - jt,$$

d'onde,

$$ds = v_0\, dt - jtdt\ ;$$

portanto, integrando, vem:

$$s = c + v_0\, t - \frac{1}{2} jt^2,$$

sendo c a constante devida á integração feita. Para determinal-a, basta fazermos $t=o$ n'esta equação: o valor de s correspondente a este valor de t será evidentemente o do espaço inicial, que representaremos por s_0. Então teremos

$$c = s_0\ ;$$

portanto, a equação precedente tomará a fórma seguinte:

$$s = s_0 + v_0\, t - \frac{1}{2} jt^2. \qquad (6)$$

Esta equação é a mais geral do movimento uniformemente retardado, por conter todas as constantes que determinam completamente o movimento.

Reciprocamente, si a relação entre o espaço e o tempo fosse dada por uma funcção da fórma

$$s = A + Bt - Ct^2,$$

o movimento seria uniformemente retardado. Com effeito, por ser, em qualquer movimento variado,

$$v = \frac{ds}{dt},$$

teriamos

$$v = B - 2\, Ct\ ;$$

isto é, que a velocidade decresce proporcionalmente ao tempo.

Si tomarmos para origem dos espaços o ponto de partida do movel, ou o logar em que o movel acha-se quando $t = o$, teremos

$$s_0 = o\ ;$$

d'onde a equação (6) se reduzirá á fórma seguinte :

$$s = v_0\, t - \frac{1}{2}\, jt^2.$$

Si

$$v_0 = jt,$$

teremos

$$s = \frac{1}{2}\, jt^2,$$

isto é, que, si a força retardatriz do movimento, depois de haver esgotado completamente a velocidade inicial v_0, continuar a agir, imprimindo ao movel, em cada instante, gráos de velocidade iguaes aos que ella havia já destruido, o movel retrocederá, readquirindo as mesmas velocidades ao passar pelas mesmas posições. O movimento se transformará então n'um movimento uniformemente accelerado, cuja velocidade inicial será nulla.

Podemos tambem geometricamente chegar á equação do movimento uniformemente retardado. Com effeito, o espaço s percorrido pelo movel durante um tempo qualquer t, graphicamente representado por OK (fig. 110), será expresso pela medida da área do trapesio $OO'\,kK$; isto é, que

$$s = (OO' + kK) \times \frac{OK}{2},$$

ou

$$s = (v_0 + v)\, \frac{t}{2}\ ;$$

mas,

$$v = v_0 - jt\ ;$$

d'onde,

$$s = (v_0 + v_0 - jt)\, \frac{t}{2}\ ;$$

portanto, a equação do movimento será :

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} jt^2.$$

Si n'esta equação substituirmos o valor de t, dado pela expressão da velocidade,

$$v = v_0 - jt,$$

virá

$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2j}.$$

No ponto L a velocidade v sendo nulla, teremos

$$s = \frac{a_0^2}{2j}.$$

Si o movel partisse sem velocidade inicial do ponto L e fosse animado d'um movimento uniformemente accelerado, no tempo $t = OL$, o espaço percorrido seria

$$s = \frac{1}{2} jt^2$$

e a velocidade seria

$$v = jt;$$

d'onde,

$$s = \frac{v^2}{2j};$$

portanto, *no movimento uniformemente retardado, cuja velocidade inicial é v_0, o movel percorre, para chegar a uma velocidade nulla, o mesmo espaço que elle percorreria si, animado d'um movimento uniformemente accelerado, tivesse de adquirir a sua velocidade v_0.*

293. Representemos graphicamente a lei dos espaços, dada pela equação geral

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} jt^2.$$

Sejam (fig. 111) Os e Ot dois eixos rectangulares. Designemos pela abscissa Ob a unidade de tempo e supponhamos que os tempos Ob, bc, cd, etc. sejam todos iguaes entre si. Pelos pontos b, c, d, etc. elevemos as perpendiculares bB, cC, dD, etc., respectivamente iguaes aos espaços correspondentes aos tempos Ob, Oc, Od, etc.

Unindo por um traço continuo os pontos A, B, C, D, etc., obteremos a imagem graphica da lei do movimento definida pela equação precedente. A simples construcção nos indicará logo que esta curva é uma parabola do segundo gráo, cujo eixo principal é uma parallela ao eixo dos espaços. A ordenada á origem OA é a distancia inicial designada por s_0.

A tangente AT ao ponto A, cuja abscissa é nulla, será definida pela equação

$$e = s_0 + v_0 t,$$

chamando e a ordenada de um qualquer de seus pontos; d'onde,

$$v_0 t = e - s_0 = mq - OA = mq - mp,$$

sendo a recta AN tirada parallelamente ao eixo Ot; portanto,

$$v_0 t = pq.$$

Considerando um ponto qualquer M da curva dos espaços, a sua ordenada s constará de tres termos: s_0, $v_0 t$, $-\frac{1}{2} jt^2$; dos quaes os dois primeiros são representados respectivamente por mp e pq; portanto, por ser a ordenada s do ponto M igual á mM, o terceiro termo $-\frac{1}{2} jt^2$ será representado por qM; isto é, teremos:

$$-\frac{1}{2} jt^2 = qM.$$

O espaço percorrido pelo movel crescerá até o ponto M_1

em que a velocidade será nulla. O tempo $Om_1 = t_1$, no fim do qual a velocidade v é nulla, será dado pela equação

$$0 = v_0 - jt_1 ;$$

d'onde,

$$t_1 = \frac{v_0}{j} .$$

Depois d'este tempo, o espaço percorrido pelo movel diminuirá, isto é, o movel voltará para o seu ponto de partida.

No ponto $M,'$ o espaço percorrido será sómente s_0. O tempo $O\ m' = t'$, no fim do qual o espaço é s_0, será dado pela equação

$$s_0 = s_0 + v_0\ t' - \frac{1}{2}\ j\ t'^2 ;$$

d'onde,

$$t' = \frac{2\ vo}{j} = 2\ t_1 .$$

A velocidade no ponto M' será dada pela equação

$$v' = v_0 - j'\ t',$$

ou, por causa do valor de t',

$$v' = -\ v_0 ;$$

isto é, que a velocidade v' será igual e de signal contrario á velocidade inicial v_0 no ponto A.

Em dois tempos equidistantes do ponto m_1, as velocidades correspondentes serão iguaes e contrarias. Com effeito, no fim dos tempos $(t_1 - t)$ e $(t_1 + t)$, equidistantes do tempo t_1, as velocidades serão, respectivamente, as seguintes:

$$v_0 - j\ (t_1 - t) = jt,$$

$$v_0 - j\ (\ t_1 + t) = -\ jt.$$

A curva dos espaços $AM_1\ M'M$ terá, pois, a recta

$M_1 m_1$ para eixo de symetria, o qual será o eixo da parabola definida pela equação

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} j t^2.$$

O ponto M_1 será o vertice d'esta parabola e as suas coordenadas serão:

$$t_1 = \frac{v_0}{j}, \quad s_1 = s_0 + \frac{v_0^2}{2j}.$$

Ella tem a sua concavidade dirigida para o eixo dos tempos, pois que o angulo que a tangente a cada ponto faz com este eixo diminue constantemente.

294. A equação geral do movimento uniformemente variado

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} j t^2,$$

encerra as tres constantes s_0, v_0, j e as duas variaveis s, t. Para determinarmos as constantes d'um movimento, precisamos conhecer as posições do movel em tres instantes dados. Si, por exemplo, aos tres valores de t

$$t = 1, \; t = 2, \; t = 3$$

correspondem os valores de s

$$s = 3^m, \; s = 10^m, \; s = 19^m,$$

teremos as tres relações seguintes:

$$3 = s_0 + v_0 + \frac{1}{2} j,$$

$$10 = s_0 + 2 v_0 + \frac{1}{2} j . 4,$$

$$19 = s_0 + 3 v_0 + \frac{1}{2} j . 9;$$

d'onde,

$$s_0 = -2^m, \; v_0 = 4^m, \; j = 2^m;$$

portanto, a equação do movimento será:

$$s = -2 + 4t + 2t^2,$$

que é a equação d'um movimento uniformemente accelerado. A equação da velocidade será:

$$v = 4 + 4t.$$

295. No preambulo geral da mecanica, vimos que a composição e decomposição dos movimentos uniformes reduzem-se á composição e decomposição das respectivas velocidades; agora mostremos que a consideração dos movimentos uniformemente accelerados nos ensina que a sua composição e decomposição reduzem-se á das respectivas forças acceleratrizes. Com effeito, consideremos um ponto material solicitado sem velocidade inicial por tres forças acceleratrizes constantes j, j', j'' segundo as direcções de tres eixos rectangulares fixos. Sejam

$$x = \frac{1}{2} j\, t^2,\ y = \frac{1}{2} j'\, t^2,\ z = \frac{1}{2} j''\, t^2$$

as equações dos tres movimentos rectilineos e uniformemente accelerados, correspondentes ás forças acceleratrizes dadas.

Eliminando o tempo t, resultarão as equações seguintes:

$$x = \frac{j}{j''} z,\ y = \frac{j}{j''} z,$$

que serão as equações da trajectoria do movel. E como estas equações são as de uma linha recta, passando pela origem O dos eixos coordenados, o movel terá no espaço um movimento rectilineo.

Considerando um ponto M qualquer d'esta trajectoria, cujas coordenadas no fim do tempo t sejam (x, y, z), o

caminho OM, que designaremos por s, percorrido pelo movel durante este tempo, será:

$$s = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} t^2 \sqrt{j^2 + j'^2 + j''^2} = \frac{1}{2} J t^2,$$

sendo

$$J = \sqrt{j^2 + j'^2 + j''^2}.$$

O simples exame da equação do movimento

$$s = \frac{1}{2} J t^2$$

nos indica que o movimento composto dos tres movimentos uniformemente accelerados, dirigidos segundo os eixos coordenados, é tambem um movimento uniformemente accelerado. A acceleração J d'este movimento resultante será composta das tres accelerações j, j', j'', pela mesma regra da composição de tres forças instantaneas convergentes. D'aqui podemos facilmente concluir que a composição e a decomposição das forças acceleratrizes seguem as mesmas leis que a composição e a decomposição das forças instantaneas, unicas consideradas em toda a estatica.

Em toda a estatica, sim, porque convém que nunca nos esqueçamos de que esta simples parte da mecanica geral corresponde ao estudo dos movimentos uniformes ; e estes movimentos só podem ser devidos a forças instantaneas, taes como *as impulsões* consideradas no phenomeno do choque dos corpos.

Si na estatica muitas vezes fallámos na força da gravidade e na força da gravitação, forças estas essencialmente continuas, jámais as considerámos sob o ponto de vista dynamico.

E si sómente as considerámos sob o ponto de vista estatico, é como si ellas fossem previamente substituidas por forças instantaneas equivalentes.

Só por este modo as forças continuas poderão ser consideradas nas equações da estatica, equações que não encerram o tempo como variavel.

Feitas estas ligeiras considerações, continuemos o estudo de que estavamos tratando.

Designando por (α, β, γ) os angulos que a trajectoria do movel faz respectivamente com os tres eixos coordenados, teremos :

$$x = s \cos \alpha \,, \; y = s \cos \beta \,, \; z = s \cos \gamma \;;$$

d'onde, a direcção da trajectoria será dada pelas expressões seguintes :

$$\cos\alpha = \frac{j}{\sqrt{j^2 + j'^2 + j''^2}} \,, \; \cos\beta = \frac{j'}{\sqrt{j^2 + j'^2 + j''^2}} \,, \; \cos\gamma = \frac{j''}{\sqrt{j^2 + j'^2 + j''^2}}$$

Finalmente, a velocidade adquirida pelo movel no fim do tempo t será :

$$v = Jt = t\sqrt{j^2 + j'^2 + j''^2}.$$

Si os movimentos segundo os eixos coordenados fossem definidos pelas equações

$$x = v_0\, t \pm \tfrac{1}{2} j\, t^2 \,,$$
$$y = v'_0\, t \pm \tfrac{1}{2} j'\, t^2 \,,$$
$$z = v_0''\, t \pm \tfrac{1}{2} j''\, t^2 \,,$$

o movimento do ponto não seria mais da mesma natureza que os movimentos componentes ; elle seria um movimento de trajectoria curvilinea.

Não devemos, pois, consideral-o na theoria cujo estudo estamos fazendo.

3. THEORIA DYNAMICA DA GRAVIDADE

296. A gravidade actua incessantemente sobre todos os corpos terrestres, communicando-lhes continuamente novos gráos de velocidade.

E' a gravidade uma força continua, de intensidade variavel.

Ella varia com as latitudes geographicas e com as altitudes, devido á acção combinada de diversas forças da natureza; mas, na mecanica geral, nós a consideramos, desde Galileo, como uma *força contínua e constante*, para um mesmo logar do globo.

Para bem acceitarmos a hypothese de Galileo, convém que primeiro conheçamos as variações da gravidade com a altitude.

Suppondo conhecida a intensidade g_1 da gravidade, por experiencias feitas a uma altitude h, poderemos facilmente conhecer a intensidade g d'essa força ao nivel do mar e na mesma latitude.

Com effeito, sendo a gravidade um caso particular da gravitação e suppondo a terra como espherica, as acções que ella exerce sobre um ponto exterior de massa μ collocado successivamente a distancias R e $R + h$ do respectivo centro, são, como vimos (195), dadas pelas equações seguintes:

$$g = \frac{\mu M f}{R^2} \text{ e } g_1 = \frac{\mu M f}{(R+h)^2}$$

nas quaes R designa o raio, M a massa da terra e f a gravidade da unidade de massa sobre a unidade de massa, á unidade de distancia.

Comparando as expressões precedentes, teremos:

$$\frac{g}{g_1} = \frac{(R+h)^2}{R^2}$$

d'onde,

$$g = g_1\left(1 + \frac{2h}{R} + \frac{h^2}{R^2}\right).$$

Por ser, em geral, a altitude h muito pequena em relação ao raio R, poderemos desprezar o termo

$$\frac{h^2}{R^2};$$

portanto,

$$g = g_1 \left(1 + \frac{2\,h}{R}\right);$$

mas,

$$\frac{2}{R} = 0{,}000000314;$$

d'onde,

$$g = g_1\,(1 + 0{,}000000314\;h).$$

E como a altitude h terá, em geral, um pequeno valor em relação ao raio R, a gravidade g_1 terá apenas augmentado de uma quantidade absolutamente inapreciavel.

Não será, portanto, absurda a hypothese de uma gravidade constante, para um mesmo logar do globo.

E supposta constante a gravidade, o movimento vertical dos graves será o mais bello exemplo de um movimento rectilineo e uniformemente variado.

297. Galileo, o fundador espontaneo da mecanica geral, por experiencias directas e sufficientemente precisas, instituiu a hypothese de uma gravidade constante, para os corpos considerados em um mesmo logar do globo.

Eis o memoravel documento historico, de 1638, que encerra as suas conjecturas sobre a quéda dos graves:

« Tratemos agora do movimento accelerado e procuremos antes a sua definição na propria natureza. Porque não seria absurdo imaginar arbitrariamente uma lei de movimento e estudar as affecções d'este movimento; mas, si a definição do nosso movimento accelerado reproduz a essencia do movimento naturalmente accelerado, teremos, como desejamos, estudado ao mesmo tempo a lei da quéda dos graves.

« E' o que acreditamos achar, depois de muito ter pensado, porque as leis que estabelecemos racionalmente estão de accôrdo com as que se observam na natureza. Em summa, espontaneamente somos levados a descobrir a lei do movimento naturalmente accelerado, pela observação das outras obras da natureza, nas quaes ella só emprega os meios mais

simples e os mais faceis ; porque penso que ninguem julgará que o vôo e a natação possam ser realizados por meios mais simples e mais faceis que os empregados instinctivamente pelos passaros e peixes.

« Assim, quando vejo uma pedra adquirir, em sua quéda, continuos accrescimos de velocidade, porque não pensarei que estes accrescimos sejam regulados da maneira a mais simples?

« Ora, si observarmos attentamente este facto, achamos ser este modo de accrescimo mais simples o que se realiza sempre da mesma maneira. Comprehende-se facilmente observando a mui grande affinidade que se acha entre o tempo e o movimento, porque, assim como o movimento uniforme se concebe e se define pela uniformidade nos tempos e igualdade nos espaços, do mesmo modo podemos conceber que os accrescimos de velocidade se realizam de uma maneira simples nas partes iguaes do tempo, imaginando que, no movimento uniformemente accelerado, a velocidade receba sempre os mesmos accrescimos iguaes em tempos iguaes quaesquer ; de sorte que adquirindo o movel no fim de duas particulas do tempo, tres, etc., velocidades dupla, tripla, etc., da que tinha adquirido, a partir do repouso, na primeira ; si tomasse, no fim de cada uma d'essas particulas do tempo, um movimento uniforme cuja velocidade fosse a então adquirida: percorreria n'estes diversos movimentos caminhos simples, duplo, triplo, etc. em um mesmo tempo.

« Diremos, pois, que um movimento uniformemente accelerado é aquelle cuja velocidade cresce de quantidades iguaes em quaesquer tempos iguaes.»

298. Traduzindo algebricamente a hypothese de Galileo, suppondo os graves partindo do repouso e cahindo no vacuo, teremos:

$$v = gt,$$

sendo g a acceleração da gravidade ; portanto, a altura da quéda h será:

$$h = \frac{1}{2} gt^2 ;$$

d'onde as duas leis seguintes:

1ª *As velocidades adquiridas nos diversos instantes são proporcionaes aos tempos decorridos desde o começo da quéda.*

2ª *Os espaços totaes percorridos nos mesmos instantes, ou as alturas de quéda, são proporcionaes aos quadrados dos tempos decorridos.* Esta segunda lei fornece-nos o corollario seguinte : *os espaços percorridos durante intervallos iguaes de tempo crescem como a serie dos numeros impares.* Com effeito, fazendo successivamente na ultima equação $t = o$, $t = 1$, $t = 2$, etc. e designando por h_0, h_1, h_2, etc. os valores correspondentes de h, teremos:

$$h_1 - h_0 = \frac{1}{2} g . 1 . - \frac{1}{2} g . 0 = \frac{1}{2} g . 1,$$

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} g . 4 - \frac{1}{2} g . 1 = \frac{1}{2} g . 3,$$

$$h_3 - h_2 = \frac{1}{2} g . 9 - \frac{1}{2} g . 4 = \frac{1}{2} g . 5,$$

$$h_4 - h_3 = \frac{1}{2} g . 16 - \frac{1}{2} g . 9 = \frac{1}{2} g . 7,$$

etc. etc. Os primeiros membros d'estas igualdades sendo exactamente os espaços percorridos durante os successivos segundos de tempo 1º, 2º, 3º, 4º, etc., vemos claramente que estes espaços augmentam como a serie dos numeros impares 1, 3, 5, 7, etc., como queriamos demonstrar.

Das equações precedentes,

$$v = gt, \; h = \frac{1}{2} gt^2,$$

eliminando o tempo t, teremos:

$$h = \frac{v^2}{2g};$$

d'onde, a 3ª lei seguinte: *As alturas de quéda são proporcionaes aos quadrados das velocidades adquiridas no fim de cada uma das mesmas alturas.*

Finalmente, si das equações

$$h = \frac{v^2}{2g}, \; v = g\,t,$$

eliminarmos g, teremos

$$v = \frac{2h}{t};$$

d'onde, para $t = 1$, resultará:

$$v = 2h;$$

isto é, teremos a 4ª lei seguinte: *A velocidade adquirida no fim da primeira unidade de tempo é igual ao dobro da altura de quéda já percorrida durante essa mesma unidade de tempo.*

299. Para o Rio de Janeiro, a altura vertical percorrida, no *primeiro segundo* de quéda e no vacuo, por um corpo abandonado livremente á acção da gravidade, é igual a $4^m,8937$; portanto, a *velocidade adquirida* no fim d'este tempo será:

$$g = 9^m,7874.$$

Na Bahia,

$$g = 9^m,7828.$$

Em S. Luiz do Maranhão,

$$g = 9^m,7797.$$

300. Resolvamos algumas questões sobre a quéda dos graves.

I. Em que tempo um corpo cahindo, percorrerá a altura de 500 metros ?

A equação

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

dá-nos:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{1000}{9,787}} = 10^s,1.$$

II. Qual será a velocidade d'esse corpo no fim de sua quéda ?

A equação

$$v = gt$$

dá-nos:

$$v = 9,787 \times 10,1 = 98^{m},848.$$

Outro modo: a equação da *velocidade devida á altura h,*

$$v = \sqrt{2\,gh,}$$

dá-nos :

$$v = \sqrt{2 \times 9,787 \times 500} = \sqrt{97,87} = 98^{m},848.$$

III. No fim de 10 segundos chega um corpo ao termo de sua quéda : que espaço percorreu?

A equação

$$h = \frac{1}{2}\, g\, t^{2}$$

dá-nos:

$$h = 4\,,\,8937 \times 100 = 489^{m},37.$$

IV. Que altura deverá um corpo ter percorrido, para adquirir a velocidade de oito metros por segundo ?

A equação da *altura devida á velocidade v,*

$$h = \frac{v^{2}}{2g}\,,$$

dá-nos:

$$h = \frac{64}{2 \times 9,787} = \frac{32000}{9787} = 3,^{m}269.$$

V. Supponhamos (fig. 112) que, no ponto *A*, acham-se em repouso dois corpos differentes e que, no fim de um segundo, decorrido desde o instante da quéda vertical do primeiro corpo, deixamos cahir o outro, na mesma vertical: qual será a distancia entre estes dois corpos, no fim de dois

segundos, decorridos desde o instante da partida do ultimo corpo?

Solução. O espaço AB percorrido pelo primeiro corpo até o instante da partida do segundo será:

$$AB = \frac{1}{2}gt^2 = 4,893 \times 1^2 = 4^m,893.$$

No fim de dois segundos de tempo, o segundo corpo terá percorrido um espaço

$$AA' = \frac{1}{2}gt^2 = 4,893 \times 2^2 = 19^m,572.$$

Si a duração da quéda AA' do segundo corpo é de dois segundos, a da quéda AB' do primeiro será de tres segundos; portanto, o espaço percorrido por este corpo será

$$AB' = \frac{1}{2}gt^2 = 4,893 \times 3^2 = 44^m,037.$$

D'onde,

$$A'B' = AB' - AA' = 24^m,465.$$

Tal será a distancia entre os dois corpos no fim de dois segundos, decorridos desde o instante da partida do ultimo corpo.

VI. Com que velocidade deve-se lançar verticalmente um corpo de *cima* para *baixo*, para que no fim de tres segundos tenha percorrido o espaço de 100 metros?

A equação

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

dá-nos:

$$100 = 3\,v_0 + 4,893 \times 9,$$

ou

$$3\,v_0 = 55,963;$$

d'onde,

$$v_0 = 18^m,654.$$

VII. Qual será a velocidade adquirida pelo movel no fim dos tres segundos de sua quéda?

A equação

$$v = v_0 + gt$$

dá-nos:

$$v = 18{,}654 + 9{,}787 \times 3 = 48^{\mathrm{m}}{,}015.$$

VIII. Um observador deixa cahir uma pedra em um poço e percebe o ruido da quéda t segundos depois. Sabendo-se que o som percorre a metros por segundo, pede-se a profundidade do poço.

Solução. A duração t' da quéda será dada pela equação

$$h = \frac{1}{2} g t'^2;$$

d'onde,

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

O tempo t_1 empregado pelo som a percorrer o espaço h será dado pela equação do movimento uniforme

$$h = at_1;$$

d'onde,

$$t_1 = \frac{h}{a}.$$

A somma d'estes dois tempos t' e t_1 será o intervallo t; portanto, a equação do problema será

$$\frac{h}{a} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = t;$$

d'onde, fazendo $\sqrt{h} = x$, teremos:

$$h = x^2 = \left[-\sqrt{\frac{a^2}{2g}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2g} + at}\right]^2.$$

Por ser $t_1 < t$, devemos ter

$$\frac{h}{a} < t,$$

ou

$$h < at;$$

portanto, o segundo radical deverá ser tomado com o signal superior, isto é,

$$h = \left[-\sqrt{\frac{a^2}{2g}} + \sqrt{\frac{a^2}{2g} + at} \right]^2.$$

Tal será a profundidade procurada. A velocidade a do som é de 340 metros por segundo.

301. Seja agora um corpo (uma bala de fuzil, por exemplo) lançado de *baixo* para *cima*, segundo a vertical e no vacuo. Tomando para origem dos espaços o ponto de partida e considerando os espaços positivos no sentido da impulsão inicial, teremos as equações seguintes:

$$v = v_0 - gt, \quad h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2,$$

por ser o movimento do projectil retardado pela força da gravidade, que, em cada instante, actua com a mesma intensidade para diminuir, por gráos iguaes, a sua velocidade inicial.

Sendo, pois, este movimento um movimento uniformemente retardado, as equações precedentes nos darão todas as circumstancias do phenomeno. Os valores de v e h constam de dois termos, um positivo e outro negativo. No começo do movimento o projectil subirá, pois a impulsão instantanea inicial será sempre preponderante, qualquer que ella seja; porém, quando a força da gravidade começar a prevalecer, gt será maior que v_0 e a velocidade v tornando-se negativa, o projectil cahirá.

Para conhecermos a maxima elevação do projectil e o

tempo correspondente, bastará que tornemos nulla a velocidade v ou que façamos

$$\frac{dh}{dt} = 0.$$

Esta annullação da primeira derivada da funcção

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

corresponde a ser h o *maximo* espaço percorrido pelo corpo. Fazendo, pois,

$$\frac{dh}{dt} = 0,$$

virá :

$$t = \frac{v_0}{g};$$

d'onde, substituindo este valor na equação precedente, teremos:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Taes são os valores do tempo e da maxima altura percorrida. Assim, emquanto tivermos

$$t < \frac{v_0}{g},$$

o projectil subirá. Quando

$$t = \frac{v_0}{g},$$

o movel terá perdido toda a sua velocidade ; mas não ficará em repouso, porque não permanecerá durante um tempo apreciavel na posição correspondente a essa velocidade nulla.

Finalmente, quando

$$t > \frac{v_0}{g},$$

o projectil cahirá, animado de uma velocidade negativa, que se accelera a partir de $v = 0$.

Para

$$t = \frac{2v_0}{g},$$

isto é, para um valor do tempo duplo do que corresponde á maxima elevação, teremos:

$$v = -v_0 \quad , h = 0 \;;$$

isto é, que o grave emprega para voltar ao ponto de partida o mesmo tempo que gasta em sua ascensão e que ao chegar a este ponto de partida acha-se animado da velocidade de projecção, em sentido contrario.

302. Como exercicios, resolvamos alguns problemas.

I. Um corpo lançado verticalmente de *baixo* para *cima* volta ao ponto de partida no fim de 20 segundos: qual a sua elevação?

Si o movel gasta 20 segundos para subir e descer, é claro que gastará sómente 10 segundos para percorrer a altura h; d'onde, a equação

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

dá-nos:

$$h = 4{,}893 \times 10^2 = 489^{\text{m}}{,}3.$$

II. Qual a velocidade inicial do dito corpo?

A equação

$$v = v_0 - gt,$$

para $v = 0$, dá-nos:

$$v_0 = gt\,,$$

d'onde,

$$v_0 = 9{,}787 \times 10 = 97^{\text{m}}{,}87.$$

III. Com que velocidade deve ser lançado verticalmente um projectil para que possa elevar-se á altura de 400 metros?

A equação

$$400 = \frac{1}{2} gt^2$$

dá-nos

$$t = 9^s ;$$

portanto, si na equação

$$v = v_0 - gt$$

fizermos $v = 0$, teremos

$$v_0 = gt = 9,787 \times 9 = 89^m,083.$$

IV. A que altura se elevará um corpo lançado verticalmente de *baixo* para *cima* com uma velocidade de 100 metros?

A equação

$$v = v_0 - gt,$$

para $v = 0$, dá-nos:

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{100}{9,787} = 10^s.$$

Agora, a equação

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

dá-nos:

$$h = 100 \times 10 - 4,893 \times 10^2 = 510^m,7.$$

V. Que espaço percorre o corpo durante o *primeiro segundo* de seu movimento?

A equação

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

dá-nos:

$$h = 100 \times 1 - 4,893 \times 1^2 = 95^m,107.$$

VI. Um projectil foi lançado verticalmente com uma velocidade de 250 metros: no fim de que tempo esta velocidade se achará reduzida a 50 metros, sómente sob a influencia da gravidade?

A equação

$$v = v_0 - gt$$

dá-nos:

$$50 = 250 - 9{,}787 \times t\ ;$$

d'onde, approximadamente,

$$t = 20^s.$$

VII. Que espaço percorreu o projectil?

A equação

$$h = v_0\, t - \frac{1}{2}\, gt^2$$

dá-nos:

$$h = 250 \times 20 - 4{,}893 \times 400 = 3042^m{,}8.$$

303. Resulta do que fica dito que, si quizessemos compôr um movimento rectilineo e uniforme com um movimento rectilineo e uniformemente accelerado, teriamos, no fim de um tempo qualquer, conforme elles fossem no mesmo sentido ou em sentidos oppostos, um espaço exactamente igual á somma ou á differença dos espaços separadamente percorridos pelo movel que possuisse estes dois movimentos successivamente. Esta composição, que é um dos casos mais simples da segunda lei fundamental da mecanica geral, nos leva a dizer que os dois unicos movimentos rectilineos, que devemos considerar como typos de movimentos simples, são os movimentos definidos por equações da fórma

$$s = at \quad \text{e} \quad s = bt^2.$$

Além d'estes dois movimentos não existe nenhum outro movimento simples. Si existisse, certamente seria o que fosse definido por uma equação da fórma

$$s = ct^3\ ;$$

mas nós ignoramos ainda a significação concreta do parametro c d'esta equação, pois a natureza não nos offerece nenhum movimento d'essa especie.

4. THEORIA DA ASSIMILAÇÃO DOS MOVIMENTOS

304. Si imaginarmos que a força variavel que actua continuamente sobre um ponto material, n'uma mesma direcção, se tornasse constante durante dois intervallos de tempo infinitamente pequenos e consecutivos quaesquer, o movimento rectilineo e variado do movel seria substituido pela successão d'uma infinidade de movimentos rectilineos e uniformemente variados, todos da mesma direcção, cada um effectuando-se durante um intervallo de tempo infinitamente pequeno. D'aqui a definição da força acceleratriz d'um movimento rectilineo e variado qualquer : *é a acceleração do movimento rectilineo e uniformemente variado que constitue um dos elementos do movimento rectilineo e variado, no instante que se considera.*

D'onde, si v designa a velocidade do movel no fim do tempo t, $v + dv$ será a velocidade no fim do tempo $t + dt$; portanto, dv será a velocidade adquirida durante o tempo dt. Ora, considerando o movimento como sendo uniformemente variado durante este tempo infinitesimal e chamando φ a intensidade da acceleração no fim do tempo t, teremos :

$$dv = \varphi dt ;$$

d'onde,

$$\varphi = \frac{dv}{dt} ;$$

isto é, que *a força que imprime a um movel um movimento rectilineo e variado qualquer é em cada instante medida pelo coefficiente differencial de primeira ordem da velocidade, ou pela derivada da velocidade tomada em relação ao tempo.*

Por ser n'um movimento variado qualquer,

$$v = \frac{ds}{dt},$$

teremos

$$dv = \frac{d^2s}{dt^2}\, dt\,;$$

d'onde,

$$\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}\,;$$

isto é, que *a força acceleratriz é tambem medida pela segunda derivada do espaço tomada em relação ao tempo.*

Si das equações

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt}$$

eliminarmos o tempo dt, resultará :

$$\varphi = \frac{d\,\frac{1}{2}\,v^2}{ds},$$

fórmula que servirá para o calculo da força acceleratriz, quando a velocidade fôr conhecida em funcção do espaço, ou para o calculo da velocidade, quando a força acceleratriz fôr conhecida em funcção do espaço.

Si se conhece a equação do movimento,

$$s = f\,(t),$$

teremos :

$$v = f'\,(t)\,;$$

portanto,

$$\varphi = f''\,(t)\,.$$

Si a força φ é *acceleratriz*, a velocidade crescerá com o tempo, dv e dt terão o mesmo signal e φ será uma quantidade positiva; mas, si a força φ é *retardatriz*, a velocidade decrescerá com o tempo, dv e dt não terão o mesmo signal e φ será uma quantidade negativa.

305. Seja (fig. 113) OMB a curva das velocidades definida pela equação

$$v = f'(t) .$$

Para construirmos a acceleração do movel no fim do tempo t, representado pela abscissa OP, seja M o ponto da curva das velocidades OMB, que corresponde a este tempo.

O movimento rectilineo e uniformemente variado que constitue um dos elementos do movimento rectilineo e variado, no instante que consideramos, é representado pelo elemento da curva OMB correspondente ao ponto M. Si este movimento rectilineo uniformemente variado perdurasse durante um tempo qualquer, seria representado pela tangente MT. A força acceleratriz do movimento rectilineo e variado no fim do tempo t sendo exactamente a acceleração d'este movimento rectilineo e uniformemente variado, façamos a construcção seguinte:

Pelo ponto M tiremos uma recta MN parallela ao eixo Ot e d'uma grandeza igual á da linha adoptada para representar a unidade de tempo. Pelo ponto N tracemos NQ parallelamente ao eixo Ov. A grandeza d'esta recta NQ será a da acceleração no fim do tempo t. Com effeito, adoptando a mesma grandeza linear MN para representar as unidades de tempo e espaço na construcção da curva das velocidades OB, teremos:

$$\frac{dv}{dt} = tg\, MTP ;$$

mas o triangulo MTP dá-nos:

$$tg\, MTP = \frac{MP}{TP} ;$$

portanto,

$$\varphi = \frac{MP}{TP} ;$$

mas, tambem os triangulos semelhantes MTP e QNM dão-nos :

$$\frac{MP}{TP} = \frac{NQ}{MN};$$

d'onde,

$$\varphi = \frac{NQ}{MN};$$

mas, por ser

$$MN = 1,$$

teremos

$$\varphi = NQ,$$

como queriamos demonstrar.

306. Si construirmos a acceleração em cada ponto da curva das velocidades,

$$v = f'(t),$$

pelo methodo precedente, poderemos tambem obter uma curva que permittir-nos-ha o conhecimento da acceleração d'um ponto material, em uma época qualquer; ella será a representação graphica da lei das accelerações do movimento, isto é, da equação

$$\varphi = f''(t).$$

Sejam (fig. 114) dois eixos rectangulares Ot e $O\varphi$. Determinemos as accelerações do ponto material no fim de 1, 2, 3....t segundos de tempo.

Supponhamos que a abscissa Oa represente a unidade de tempo e que os tempos Oa, ab, bc, etc. sejam todos iguaes entre si. Pelos pontos a,b, c, etc. elevemos as perpendiculares am, bn, cp, etc., respectivamente iguaes ás accelerações correspondentes aos tempos Oa, Ob, Oc, etc.

Unindo por um traço continuo as extremidades das ordenadas am, bn, cp, etc. obteremos um diagramma, que será a curva representativa da força acceleratriz : *é a curva das accelerações.*

307. Consideremos um movimento rectilineo e variado qualquer definido pela equação

$$s = f(t).$$

No fim do tempo t, o espaço percorrido será medido por $f(t)$ e no fim do tempo $(t + \theta)$ o movel terá percorrido o espaço $f(t + \theta)$; portanto, o espaço percorrido durante o tempo θ será

$$f(t + \theta) - f(t).$$

Desenvolvendo $f(t + \theta)$ pela serie de Taylor, teremos:

$$f'(t)\,\theta + f''(t)\,\frac{\theta^2}{1.\,2} + f'''(t)\,\frac{\theta^3}{1.\,2.\,3} + etc.,$$

sendo o tempo t, decorrido antes do tempo infinitamente pequeno θ, considerado como uma constante.

O simples exame dos differentes termos d'esta serie mostra-nos claramente que o espaço total percorrido durante o tempo θ será composto dos espaços parciaes

$$f'(t)\,\theta,\ \frac{1}{2}\,f''(t)\,\theta^2,\ \frac{1}{2.3}\,f''''(t)\,\theta^3,\ etc.;$$

dos quaes o primeiro corresponde a um movimento uniforme em que a velocidade é medida por $f'(t)$; o segundo corresponde a um movimento uniformemente accelerado em que a força acceleratriz é medida por $f''(t)$. Os outros espaços não referindo-se a nenhum movimento simples conhecido, não precisamos consideral-os e podemos fazer abstracção d'elles.

Assim, qualquer movimento rectilineo e variado definido pela equação

$$s = f(t)$$

póde, em um instante qualquer no fim do tempo t, ser con-

siderado como unicamente composto d'um movimento uniforme devido a uma velocidade impressa ao movel,

$$v = f'(t),$$

e d'um movimento uniformemente accelerado devido a uma força acceleratriz actuando sobre o movel,

$$\varphi = f''(t).$$

Tal é a concepção de Lagrange sobre a medida geral da velocidade adquirida e da força acceleratriz.

308. Supponhamos que

$$s = f(t) \quad \text{e} \quad e = F(t)$$

sejam as equações de dois movimentos rectilineos quaesquer; supponhamos mais que os dois moveis considerados tenham chegado, no fim do tempo t, ao mesmo ponto M (fig. 115) de sua trajectoria commum Ox; isto é, que

$$f(t) = F(t).$$

Demos um accrescimo θ á variavel t e consideremos a distancia $M_1 M_2$, que designaremos por D, entre os dois moveis no fim do tempo $(t + \theta)$. Esta distancia será evidentemente medida pela differença

$$D = M_1 M_2 = M M_2 - M M_1 = f(t + \theta) - F(t + \theta).$$

Servindo-nos da fórmula de Taylor, o desenvolvimento correspondente a esta differença será expresso por

$$D = \Big[f'(t) - F'(t)\Big]\,\theta + \Big[f''(t) - F''(t)\Big]\,\frac{\theta^2}{1.\,2} + \Big[f'''(t) -$$

$$- \quad '(t)\Big]\,\frac{\theta^3}{1.\,2.\,3} + etc.,$$

por ser

$$f(t) = F(t).$$

O simples exame d'esta serie mostra-nos que a differença entre os espaços percorridos pelos moveis durante o tempo θ será composta de differentes partes, correspondentes aos successivos instantes do tempo θ.

Este desenvolvimento permitte-nos, pois, fazer uma idéa exacta da *assimilação* mais ou menos intima dos dois movimentos considerados.

Com effeito, si tivermos

$$f'(t) = F'(t),$$

a distancia D será evidentemente menor e o movimento dos dois moveis se effectuará com velocidades iguaes durante o primeiro instante do tempo θ; isto é, haverá n'esta coincidencia de movimentos uma *assimilação de primeira ordem.*

Si tivermos simultaneamente

$$f'(t) = F'(t),$$
$$f''(t) = F''(t),$$

a distancia D será ainda menor e o movimento dos dois moveis se effectuará com velocidades iguaes e sob a acção de forças acceleratrizes iguaes durante os dois primeiros instantes do tempo θ; isto é, haverá n'esta dupla coincidencia de movimentos uma assimilação mais intima ou de *segunda ordem.*

Haverá uma coincidencia dos dois moveis em tres instantes infinitamente pequenos e consecutivos, ou uma *assimilação de terceira ordem,* si tivermos simultaneamente

$$f'(t) = F'(t),$$
$$f''(t) = F''(t),$$
$$f'''(t) = F'''(t);$$

e assim por diante. *O grão de semelhança dos dois movimentos, determinado algebricamente pelo numero de derivadas successivas que tiverem respectivamente o mesmo*

valor, terá sempre para interpretação concreta a coincidencia dos dois moveis durante um numero igual de instantes consecutivos.

Quando a equação

$$e = F(t)$$

contiver n constantes arbitrarias, o movimento cuja lei esta equação exprime poderá ser assimilado a um outro qualquer movimento definido pela equação

$$s = f(t),$$

até a ordem n. As constantes serão determinadas por meio das equações que fixarem o gráo de assimilação.

Tal é em que consiste a concepção de Lagrange, generalisada por A. Comte. Ella permitte-nos a possibilidade, embora seja sob o ponto de vista abstracto, de conhecer mais profundamente um movimento rectilineo e variado qualquer, cuja equação contenha um numero qualquer de constantes arbitrarias, fazendo a sua comparação successiva com os movimentos rectilineos conhecidos. Mas, assim como na geometria differencial a theoria geral dos contactos das curvas reduz effectivamente a medida da curvatura á comparação successiva d'uma curva qualquer com a linha recta e o circulo, por serem estes dois logares geometricos os mais usualmente conhecidos, que podem servir de typos a todos os outros, com mais utilidade; analogamente, a theoria dynamica da assimilação dos movimentos deve reduzir o seu dominio á comparação successiva d'um movimento rectilineo e variado qualquer com o movimento uniforme e com o movimento uniformemente accelerado; ou, como o fez Lagrange, afim de sómente estabelecer uma comparação, com o movimento compôsto d'estes dois movimentos simples.

Si, por exemplo, a experiencia nos offerecesse o movimento rectilineo definido pela equação

$$e = m + n\,t + \frac{1}{2}\,p\,t^2 + \frac{1}{2}\,q\,t^3,$$

teriamos um conhecimento mais profundo da natureza d'um movimento rectilineo e variado qualquer. Com effeito, assimilando o movimento definido pela equação precedente com o movimento dado pela equação

$$s = f(t),$$

teremos :

$$f'(t) = n + pt + \frac{1}{2} q t^2,$$

$$f''(t) = p + q t,$$

$$f'''(t) = q;$$

isto é, teriamos para a terceira derivada do espaço em relação ao tempo uma significação concreta que se poderia chamar uma *acceleração de segunda ordem ou superacceleração;* mas, infelizmente, no estado actual dos nossos conhecimentos a natureza não offerece-nos nenhum movimento em que os espaços variem com os cubos dos tempos.

Em todo caso, comprehende-se o immenso valor logico da theoria da assimilação dos movimentos, que permitte-nos a possibilidade de conhecer cada vez mais a significação dynamica das derivadas successivas do espaço em relação ao tempo.

5. MEDIDA DA FORÇA MOTRIZ

309. *As forças instantaneas estão entre si na mesma relação que as quantidades de movimento que ellas imprimem aos corpos.*

Com effeito, si as forças f e f' imprimem ás massas m e m' as velocidades v e v', em um mesmo instante, a equação

$$F = M v, \qquad (a)$$

já estabelecida (41), dá-nos:

$$f = m v, \quad f' = m' v';$$

d'onde,

$$f : f' :: m v : m' v'; \qquad (b)$$

proporção que queriamos achar. D'ella resultam os corollarios seguintes :

1.º Si as massas m e m' são iguaes, teremos :

$$f : f' :: v : v' ;$$

isto é, que *as forças instantaneas são proporcionaes ás velocidades que imprimem a corpos de massas iguaes.* Si, além da hypothese sobre as massas, suppuzermos as forças iguaes, teremos :

$$v = v' ;$$

isto é, que *as velocidades impressas por forças instantaneas iguaes a corpos de massas iguaes, são iguaes.*

2.º Si as velocidades v e v' são iguaes, a proporção (b) dá-nos :

$$f : f' :: m : m' ;$$

isto é, que *as forças instantaneas são proporcionaes ás massas a que imprimem uma mesma velocidade.* Si, além da hypothese sobre as velocidades, suppuzermos as forças iguaes, teremos :

$$m = m' ;$$

isto é, que *as massas de dois corpos sob a acção instantanea d'uma força que lhes imprime a mesma velocidade, são iguaes.*

3.º Si as forças f e f' são iguaes, a proporção (b) dá-nos:

$$v : v' :: m' : m ;$$

isto é, que *as velocidades impressas instantaneamente por uma mesma força a corpos de massas differentes são inversamente proporcionaes ás massas.*

Na fórmula (a), si fizermos igual á unidade a massa M do movel, teremos :

$$F = v ;$$

isto é, que *a força que instantaneamente imprime a um movel, cuja massa é igual á unidade, uma certa velocidade, será medida por esta mesma velocidade.*

E', pois, a velocidade d'um movimento uniforme a medida da força que o produz, quando a massa do movel é supposta igual á unidade de massa.

310. Consideremos agora um corpo de grandeza e fórma quaesquer, cujos pontos descrevam rectas parallelas, com uma mesma velocidade commum.

Imaginando que este corpo seja dividido em uma infinidade de pontos materiaes de massas iguaes, poderemos attribuir o movimento de todos estes pontos a forças elementares, iguaes em intensidade e parallelas em direcção.

A resultante será evidentemente uma força de intensidade igual á somma de todas as forças elementares e achar-se-ha applicada ao *centro* d'estas forças parallelas.

Designando por F a força total que actua continuamente sobre o movel, chamando m a sua massa e φ a força que corresponde a uma parte da massa tomada para unidade, teremos:

$$F = m\,\varphi. \qquad (c)$$

E como esta força φ é exactamente a força acceleratriz do movimento, medida pela fórmula

$$\varphi = \frac{dv}{dt},$$

resultará:

$$F = m\,\frac{dv}{dt} = m\,\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Tal será a expressão da medida geral da força em um movimento rectilineo e variado qualquer, quando considerarmos a massa do movel.

Ao producto da massa d'um movel pela sua força acceleratriz dá-se o nome de *força motriz*.

Conhecida a força motriz d'um movel e dividindo-a pela respectiva massa, teremos a medida da força acceleratriz do movimento.

Si F e F' designam duas forças motrizes quaesquer, applicadas a dois corpos de massas m e m'; si chamarmos φ e φ' as respectivas accelerações, a fórmula (c) dá-nos:

$$F = m\,\varphi,\ F' = m'\,\varphi'\,;$$

d'onde,

$$F : F' : : m\,\varphi : m'\,\varphi'\,; \qquad (d)$$

isto é, que *as forças motrizes são proporcionaes aos productos das massas pelas respectivas accelerações.*

Quando um corpo, sob a acção de uma força, apoiar-se sobre um plano fixo, perpendicular á direcção da força, elle exercerá uma *pressão* sobre o plano. A medida d'esta pressão será a da força motriz, porque, si o plano não impedisse, o movel seria livre.

311. No caso de um movimento uniformemente accelerado, cuja acceleração é a da gravidade, o *peso* do corpo será a sua força motriz e a fórmula *(c)* dá-nos:

$$P = m\,g\,, \qquad (e)$$

designando P o peso do corpo suppôsto cahindo no vacuo, g a constante que exprime a acceleração da gravidade e m a massa do movel.

Os pesos sendo as forças motrizes mais vulgares, servem de termo de comparação ás forças motrizes em geral. A unidade de força geralmente adoptada é o *kilogramma.*

312. Supponhamos que dois corpos inelasticos se choquem segundo uma mesma linha recta, movendo-se em sentidos contrarios e actuados por duas *impulsões* ou *percussões* iguaes em intensidade.

Si f e f' designam estas duas forças instantaneas, m e m' as massas dos dois corpos e v e v' as respectivas velocidades, teremos:

$$f = m\,v\,,\ f' = m'\,v'\,;$$

d'onde,

$$m\,v = m'\,v'.$$

Si a massa m' é supposta igual á unidade, a relação precedente nos dará a expressão seguinte :

$$m = \frac{v'}{v}.$$

Tal é a expressão que nos daria a medida da massa de um corpo, si fosse praticavel a determinação das velocidades v' e v; mas o peso de um corpo fornece-nos a mais simples medida de sua massa. Com effeito, da fórmula *(e)*,

$$P = mg,$$

deduz-se :

$$m = \frac{P}{g};$$

isto é, que *a massa de um corpo é a relação constante entre o seu peso e a acceleração devida a este mesmo peso.*

Sendo o peso de um corpo expresso em kilogrammas e a acceleração da gravidade expressa em metros, é claro que devemos considerar abstractamente a relação entre estas duas quantidades heterogeneas; portanto, a massa de um corpo será sempre dada por um numero abstracto.

Da relação precedente resultam os corollarios seguintes:

1.º Sendo m e m' as massas de dois corpos, cujos pesos são P e P' e as accelerações da gravidade sendo respectivamente g e g', teremos :

$$m = \frac{P}{g}; \quad m' = \frac{P'}{g'}.$$

Para um mesmo logar do globo, as accelerações g e g' sendo iguaes, virá :

$$m = \frac{P}{g}, \quad m' = \frac{P'}{g};$$

d'onde,

$$m : m' :: P : P';$$

isto é, que *as massas de dois corpos são proporcionaes aos respectivos pesos, em um mesmo logar do globo.*

2.º Si na fórmula

$$m = \frac{P}{g}$$

fizermos

$$P = g ,$$

teremos :

$$m = \frac{g}{g} = 1 ;$$

isto é, que *a unidade de massa é a massa de um corpo, cujo peso seja expresso em kilogrammas pelo mesmo numero que em metros é expressa a acceleração da gravidade.*

Sendo no Rio de Janeiro

$$g = 9^{m}, 787,$$

o peso do corpo seria

$$P = 9^{kg}, 787.$$

6. EXEMPLOS DO MOVIMENTO RECTILINEO

313. Conhecidas as equações geraes

$$v = \frac{ds}{dt} , \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d \frac{1}{2} v^2}{ds}, f = mv ,$$

$$F = m\varphi = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d \frac{1}{2} (mv^2)}{ds}, m = \frac{P}{g} ,$$

poderemos determinar todas as circumstancias de um movimento rectilineo qualquer. Ellas reduzem a questões exclusivamente algebricas todos os problemas sobre movimentos rectilineos. Quando conhecemos a equação finita entre o espaço e o tempo,

$$s = f(t) ,$$

simples differenciações nos darão immediatamente a velocidade e a força ; porém quando conhecermos a expressão da

velocidade em funcção do tempo ou do espaço, da força em funcção do tempo, do espaço ou da velocidade, só o calculo integral nos poderá fornecer as circumstancias do movimento. No caso o mais geral, a lei do movimento poderá ser dada por uma equação entre os quatro elementos: *espaço*, *tempo*, *velocidade* e *força*, da fórma da equação differencial de segunda ordem,

$$F\left(s, t, \frac{ds}{dt}, \frac{d^2s}{dt^2} \right) = o;$$

mas, em um tal caso a integração não se poderia effectuar sob uma fórma finita.

Feita esta ligeira apreciação, consideremos alguns exemplos do movimento rectilineo, afim de applicar as fórmulas fundamentaes d'essa theoria da dynamica.

314. O movimento accelerado da quéda dos graves era considerado desde a mais remota antiguidade, mas sem um exacto conhecimento da verdadeira lei do phenomeno. Aristoteles suppoz a velocidade da quéda de um grave proporcional ao espaço percorrido, isto é,

$$v = as,$$

sendo a uma constante. Examinemos esta hypothese.

Por ser n'um movimento rectilineo qualquer,

$$v = \frac{ds}{dt},$$

teremos:

$$\frac{ds}{dt} = as;$$

d'onde,

$$a\,dt = \frac{ds}{s};$$

portanto,

$$at = \int \frac{ds}{s} = lgs + lgc,$$

designando a constante da integração effectuada por *lgc* ; d'onde,

$$at = lg.cs;$$

d'onde, representando por *e* a base dos logarithmos de Neper, teremos :

$$cs = e^{at}.$$

Tal é a equação de movimento a que nos conduz a hypothese formulada.

Procurando o valor da força acceleratriz, virá :

$$\varphi = \frac{d^2s}{dt^2} = e^{at}. \frac{a^2}{c} = a^2 s;$$

isto é, que *a acceleração varia com o espaço percorrido*, o que é um absurdo manifesto.

315. A verdadeira lei da quéda dos graves não surgiu sem contestações ; d'entre estas merece particular attenção a hypothese que Baliani fez para substituir a lei de Galileo. O venerando fundador da dynamica, dizendo que *os espaços percorridos em tempos iguaes por um movel que cahe, a partir do repouso, são como os numeros impares*, deu logar a que Baliani suppuzesse que *os espaços percorridos em tempos iguaes por um movel que cahe, a partir do repouso, são como os numeros inteiros*. « Em uma época em que a dynamica era ainda tão pouco conhecida, uma tal concurrencia podia ser muito especiosa, e a discussão seria, com effeito, prolongada por muito tempo, si não se tivesse appellado para a experiencia, que condemnou immediatamente a Baliani ». (A. Comte.)

Discutamos esta hypothese.

Si os espaços percorridos em tempos iguaes por um corpo que cahe, a partir do repouso, são como os numeros inteiros, *1, 2, 3, 4, 5*..., é claro que os diversos caminhos

percorridos nos differentes tempos successivos poderão ser respectivamente representados por

$$g,\ 2g,\ 3g,\ 4g, \ldots\ldots tg;$$

d'onde, por se acharem estas quantidades em progressão por differença, será immediata a traducção algebrica da lei do movimento. Para isto, lancemos mão da fórmula conhecida para a determinação da somma dos termos de uma progressão por differença. Ella nos dá, para o espaço s percorrido no tempo t, a equação seguinte :

$$s = \frac{(g + gt)}{2} \cdot t;$$

d'onde,

$$s = \frac{1}{2} g\, t + \frac{1}{2} g\, t^2.$$

Tal é a equação que resume a hypothese de Baliani. Para conhecermos a velocidade e a força teremos :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} g + gt,$$

$$\varphi = \frac{d^2 s}{dt^2} = g;$$

isto é, que a acceleração é constante, como pela hypothese de Galileo; mas *que existe uma velocidade inicial* $\frac{1}{2}g$, *independente do tempo decorrido, que deveria ser instantaneamente impressa ao movel desde a origem do movimento* : condição que necessariamente torna absurda a hypothese de Baliani.

316. Supponhamos um corpo movendo-se sem attrito sobre um plano inclinado (fig. 116). Seja G o centro de gravidade, P o peso e m a massa d'este corpo.

Decomponhamos esta força motriz P em duas componentes rectangulares : uma normal ao plano e outra dirigida no sentido do plano. A primeira, a componente GN,

sendo destruida pela resistencia opposta pelo plano, nos dará a medida da pressão sobre esta superficie exercida pelo corpo; a segunda, a componente *GF*, será a força motriz do movimento. Si α designa a inclinação do plano sobre o horizonte, teremos :

$$N = P \cos \alpha \,, \quad F = P \operatorname{sen} \alpha \,, \quad P = mg \,;$$

d'onde,

$$N = mg \cos \alpha \,, \quad F = mg \operatorname{sen} \alpha .$$

Para conhecermos as circumstancias do movimento, tomemos a segunda d'estas equações. Ella dá-nos:

$$\frac{F}{m} = g \operatorname{sen} \alpha;$$

d'onde, por ser tambem

$$\frac{F}{m} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

teremos :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \operatorname{sen} \alpha \,;$$

d'onde,

$$\frac{d^2s}{dt^2} dt = g \operatorname{sen} \alpha \, dt \,,$$

ou

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right) = g \operatorname{sen} \alpha \, dt \,;$$

d'onde, integrando, vem :

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + g \operatorname{sen} \alpha . \, t,$$

sendo v_0 uma constante. Multiplicando por *dt*, virá :

$$ds = v_0 \, dt + g \operatorname{sen} \alpha . \, t \, dt \,;$$

d'onde, integrando, resultará :

$$s = s_0 + v_0 \, t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \alpha \, t^2,$$

sendo s_0 uma constante. Designando por v a velocidade adquirida pelo movel no fim do tempo t e suppondo a origem do movimento no ponto B, do qual elle partiu sem que houvesse recebido impulsão inicial, teremos :

$$s_0 = o\,,\ v_0 = o\,;$$

portanto, as equações do movimento serão :

$$s = \frac{1}{2} g\ sen\ \alpha.\ t^2,\ v = g\ sen\ \alpha.\ t,\ v^2 = 2\ gs.\ sen\ \alpha.$$

Si o movel fosse livre e percorresse sobre a vertical $B\ C$ a altura h, animado da velocidade v' no fim do tempo t', as equações do seu movimento seriam :

$$h = \frac{1}{2} gt'^2\,,\ v' = gt'\,,\ v'^2 = 2\ g\ h.$$

A simples comparação d'estas equações com as equações do movimento sobre o plano inclinado nos mostram que este movimento tambem é uniformemente accelerado. D'esta comparação resultam as circumstancias seguintes :

1ª, Si no fim do tempo t o espaço percorrido sobre o plano é $B\ M = s$, sobre a vertical $B\ C$ elle percorreria um espaço

$$h = \frac{1}{2} gt^2\ ;$$

d'onde,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\ ;$$

portanto, substituindo este valor na equação

$$s = \frac{1}{2} g\ sen\ \alpha.\ t^2,$$

teremos :

$$s = h\ sen\ \alpha\ ;$$

isto é, h será a hypothenusa d'um triangulo rectangulo cujo lado s será opposto a um angulo igual a α.

Então, tirando-se ME perpendicularmente á AB, resultará :

$$BE = h .$$

Assim, si traçassemos em um circulo BME (fig. 117) as respectivas cordas BM, BM', BM'', etc., seriam todas estas cordas percorridas pelo movel no mesmo tempo em que o diametro vertical BE, por serem rectangulos os triangulos BME, $BM'E$, $BM''E$, etc.

E como o triangulo rectangulo BME tambem dá-nos

$$ME = h \cos \alpha ,$$

concluimos que a corda ME tambem seria percorrida no mesmo tempo que é necessario ao movel para percorrer o diametro vertical BE.

Então, dizemos : *o tempo empregado por um grave a percorrer o diametro vertical d'um circulo é o mesmo que elle gastaria em percorrer uma qualquer das cordas do mesmo circulo.* Tal é a propriedade chamada *isochronismo.*

2.ª Para conhecermos em que pontos de BA e de BC o movel terá a mesma velocidade adquirida, teremos as equações

$$v^2 = 2\, g\, s.\, sen\, \alpha \;,\; v'^2 = 2\, g\, h.$$

Fazendo a hypothese

$$v = v' ,$$

teremos :

$$h = s.\, sen\, \alpha ;$$

isto é, que s será a hypothenusa d'um triangulo rectangulo, cujo lado h será opposto a um angulo igual a α. Então tirando-se por M (fig. 116) a perpendicular MD à BC, resultará :

$$BD = h .$$

Assim, quando o movel chegasse ao ponto D da vertical BC, teria adquirido a mesma velocidade que no ponto M de

sua trajectoria sobre o plano, o que acontece em tempos differentes. Em outros termos, diz-se: *a velocidade do corpo em* M *é dirigida no sentido* M A *e devida á altura* B D.

3.ª Si $B\ C = h$ e $B\ A = s$, teremos:

$$h = \frac{1}{2} g\, t'^2, s = \frac{1}{2}\, g\ sen\ \alpha.\ t^2;$$

d'onde, comparando, vem:

$$\frac{s}{h} = \frac{t^2}{t'^2}\ sen\ \alpha;$$

mas tambem,

$$h = BC = BA\ sen\ \alpha = s.\ sen\ \alpha;$$

d'onde,

$$sen\ \alpha = \frac{h}{s};$$

portanto, teremos:

$$\frac{s}{h} = \frac{t^2}{t'^2} \cdot \frac{h}{s},$$

ou

$$s\, t' = h\, t;$$

d'onde,

$$s : h :: t : t';$$

isto é, que, *qualquer que seja a inclinação do plano, os tempos são proporcionaes aos comprimentos* AB e BC.

Resulta d'esta propriedade que *os tempos empregados por differentes corpos em percorrer differentes planos inclinados, estão entre si como os comprimentos d'estes planos.* Com effeito, comparando os movimentos de dois graves sobre dois planos inclinados cujas alturas sejam iguaes, teremos:

$$s : h :: t : t',$$

$$s_1 : h :: t_1 : t';$$

d'onde,

$$s : s_1 :: t : t_1$$

como queriamos provar.

317. O *attrito* é um dos modificadores do movimento: é uma *resistencia passiva*, que se oppõe ao movimento dos corpos. No estudo que acabamos de fazer, abstrahimos d'esta resistencia que o movel experimenta em seu escorregamento sobre o plano; mas podemos agora consideral-a.

Coulomb demonstrou que, não sendo muito grande nem diminuta a velocidade, o attrito é approximadamente a decima parte da pressão e não depende da velocidade. Assim, a pressão que o corpo exerce sobre o plano inclinado sendo

$$N = mg \cos \alpha,$$

a resistencia do attrito será dirigida em sentido opposto ao movimento e igual a

$$\frac{1}{10} N.$$

Designando este coefficiente fraccionario por f, a equação differencial do movimento será:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \operatorname{sen} \alpha - \frac{fN}{m} = - g (f \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha);$$

d'onde, effectuando as integrações como anteriormente effectuámos, as equações finitas d'este movimento uniformemente accelerado serão:

$$v = v_0 - g (f \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) t,$$

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g (f \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) t.^2$$

Si o movel fosse lançado de A para B (fig. 116), a gravidade e o attrito seriam contrarios á velocidade inicial; d'onde, as equações finitas d'este movimento uniformemente retardado serão:

$$v = v_0 - g (f \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) t,$$

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g (f \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) t.^2$$

Si o espaço inicial é nullo, as equações dos dois movimentos serão :

$$v = v_0 - g\,(f \cos \alpha \mp \operatorname{sen} \alpha)\, t,$$

$$s = v_0\, t - \frac{1}{2}\, g\,(f \cos \alpha \mp \operatorname{sen} \alpha)\, t.^2$$

Si $\alpha = o$, o plano será horizontal e teremos:

$$v = v_0 - g f t,$$

$$s = v_0\, t - \frac{1}{2}\, g f t^2,$$

equações que pertencerão a um movimento uniformemente retardado.

318. Consideremos a quéda d'um grave no ar, na hypothese de ser a resistencia d'este meio proporcional ao quadrado da velocidade do movel.

Supponhamos (fig. 118) que este solido seja symetrico em torno d'um eixo vertical.

Evidentemente, o peso P do corpo e a resultante R das resistencias que o meio oppõe aos differentes pontos de sua superficie, são duas forças motrizes que actuam segundo a direcção da gravidade e em sentidos contrarios.

Designemos por m a massa do solido e seja G o seu centro de gravidade.

A força motriz que solicita continuamente o corpo em sua quéda será :

$$F = mg - R\ ;$$

mas tambem,

$$F = m\,\frac{dv}{dt}\ ;$$

portanto,

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{R}{m}.$$

A experiencia ensina-nos que a resistencia R, quando o movimento do corpo não é muito lento nem muito rapido,

póde ser supposta como proporcional á densidade do ar e ao quadrado da velocidade do movel. Ou

$$R = a \rho v^2,$$

sendo ρ a densidade do ar, v a velocidade do solido e a um coefficiente que depende da fórma e das dimensões do corpo, da natureza do meio e de sua temperatura. Portanto, a equação differencial do movimento será:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{a \rho v^2}{m}.$$

319. Suppondo o movel espherico, sejam V o volume, D a densidade, r o raio e m a massa d'este corpo. N'este caso, teremos:

$$m = V D = \frac{4}{3} \pi r^3 D;$$

d'onde,

$$\frac{R}{m} = \frac{3}{4} \frac{a \rho v^2}{\pi r^3 D}.$$

O coefficiente a sendo, no caso em que o movel é espherico, proporcional ao quadrado do raio, façamos

$$a = b r^2;$$

d'onde,

$$\frac{R}{m} = \frac{3 b \rho v^2}{4 \pi r D} = \frac{c \rho v^2}{D r},$$

fazendo

$$c = \frac{3 b}{4 \pi}.$$

Finalmente, como para a mesma esphera e o mesmo meio as quantidades c, ρ, D, r são constantes, podemos suppôr que estas quantidades satisfaçam a relação seguinte:

$$\frac{Dr}{c \rho} = \frac{K^2}{g},$$

sendo K uma constante. Portanto,

$$\frac{R}{m} = \frac{gv^2}{K^2}.$$

D'esta equação deduz-se:

$$K = \sqrt{\frac{m\,g.\,v}{R}};$$

d'onde, para

$$R = mg,$$

teremos:

$$K = v;$$

isto é, que a constante K é a velocidade que o movel deveria ter para que a resistencia R fosse exactamente igual ao peso do corpo.

320. Isto pôsto, o movimento do solido espherico será definido pela equação differencial seguinte:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{R}{m} = g - \frac{gv^2}{K^2}; \qquad (1)$$

d'onde, separando as variaveis v e t, teremos

$$gdt = \frac{K^2\,dv}{K^2 - v^2}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{2\,gdt}{K} = \frac{2\,K\,dv}{K^2 - v^2} = \left(\frac{K + v + K - v}{K^2 - v^2}\right) dv =$$

$$= \frac{K + v}{K^2 - v^2}\,dv + \frac{K - v}{K^2 - v^2}\,dv =$$

$$= \frac{dv}{K - v} + \frac{dv}{K + v}.$$

Integrando e suppondo nulla a velocidade inicial, de modo que tenhamos $v = o$ para $t = o$, resultará:

$$\frac{2\,gt}{K} = lg\left(K + v\right) - lg\left(K - v\right) = lg\,\frac{K + v}{K - v}; \qquad (2)$$

d'onde, designando por e a base dos logarithmos de Neper, teremos

$$\frac{K+v}{K-v}=e^{\frac{2gt}{K}};$$

d'onde,

$$v=K\frac{e^{\frac{2gt}{K}}-1}{1+e^{\frac{2gt}{K}}};$$

ou, dividindo os dois termos d'esta fracção por $e^{\frac{gt}{K}}$,

$$v=K\frac{e^{\frac{gt}{K}}-e^{-\frac{gt}{K}}}{e^{\frac{gt}{K}}+e^{-\frac{gt}{K}}}. \qquad (3)$$

Tal é a expressão finita da velocidade do grave.

321. Por ser tambem

$$v=\frac{ds}{dt},$$

teremos

$$ds=K\frac{\left(e^{\frac{gt}{K}}-e^{-\frac{gt}{K}}\right)dt}{e^{\frac{gt}{K}}+e^{-\frac{gt}{K}}};$$

d'onde,

$$s=K\int\frac{\left(e^{\frac{gt}{K}}-e^{-\frac{gt}{K}}\right)dt}{e^{\frac{gt}{K}}+e^{-\frac{gt}{K}}}=\frac{K^2}{g}\int\frac{\frac{g}{K}\left(e^{\frac{gt}{K}}-e^{-\frac{gt}{K}}\right)dt}{e^{\frac{gt}{K}}+e^{-\frac{gt}{K}}}.$$

Effectuando a integração, teremos

$$s = \frac{K^2}{g} lg \left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}} \right) + C,$$

sendo C uma constante que será determinada pela condição de termos $s = o$, quando $t = o$. Assim, virá:

$$C = -\frac{K^2}{g} lg\, 2;$$

portanto,

$$s = \frac{K^2}{g} lg \left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}} \right) - \frac{K^2}{g} lg\, 2;$$

ou, finalmente,

$$s = \frac{K^2}{g} lg \frac{1}{2} \left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}} \right). \qquad (4)$$

Tal será a equação finita que define a lei do movimento.

322. Por ser, em um movimento rectilineo e variado qualquer,

$$\varphi = \frac{vdv}{ds},$$

teremos

$$vdv = \left(g - \frac{gv^2}{K^2} \right) ds;$$

d'onde, deduz-se:

$$ds = \frac{K^2}{2g} \cdot \frac{2vdv}{K^2 - v^2}.$$

Integrando, vem:

$$s = \frac{K^2}{2g} \int \frac{2\, vdv}{K^2 - v^2} = -\frac{K^2}{2g} l_J \left(K^2 - v^2 \right) + C,$$

sendo C a constante da integração effectuada, a qual será

determinada pela condição de termos $s = o$, quando $v = o$. D'onde, teremos:

$$C = \frac{K^2}{2g} . lg K^2;$$

portanto,

$$s = \frac{K^2}{2g} lg K^2 - \frac{K^2}{2g} lg (K^2 - v^2)$$

ou, finalmente,

$$s = \frac{K^2}{2g} lg \frac{K^2}{K^2 - v^2}. \qquad (5)$$

Tal é a relação entre o espaço percorrido e a velocidade adquirida.

323. As equações estabelecidas nos darão todas as circumstancias do movimento considerado.

Deduz-se facilmente d'estas equações que o tempo t augmentando continuamente, o movimento tenderá cada vez mais a tornar-se um movimento uniforme.

Elle será uniforme, quando a velocidade gt, devida á acção da gravidade, fôr muito grande em relação á velocidade constante K. Evidentemente, a variavel t attingindo um valor muito grande, a exponencial

$$e^{-\frac{gt}{K}} = \frac{1}{e^{\frac{gt}{K}}}$$

será uma quantidade insignificante; d'onde, desprezando este termo, as equações (3) e (4) nos darão :

$$v = K, s = K t - \frac{K^2}{g} lg 2;$$

d'onde, por ser a força acceleratriz φ dada pela expressão

$$\varphi = g - \frac{gv^2}{K^2},$$

teremos

$$\varphi = g - \frac{gK^2}{K^2} = o,$$

Este resultado é simplesmente devido a ser a resistencia do ar uma força continuamente variavel, capaz de chegar a neutralisar a acção tambem continua, mas constante, da gravidade e determinar o equilibrio do corpo.

Mas, é claro que só teremos $v = K$ quando $t = \infty$, de modo que o movimento variado do grave só seria uniforme si a variavel t attingisse um valor infinitamente grande.

Da expressão dada precedentemente,

$$\frac{Dr}{c\rho} = \frac{K^2}{g},$$

tiramos

$$K^2 = \frac{gDr}{c\rho};$$

isto é, que *o quadrado da velocidade do movimento uniforme para o qual tende o movimento variado de um solido espherico é proporcional á densidade do corpo e ao raio da esphera e inversamente proporcional á densidade do ar*, o que as experiencias confirmam.

324. Da expressão da resistencia do ar,

$$\frac{R}{m} = \frac{gv^2}{K^2},$$

deduz-se

$$R = mg\left(\frac{v}{K}\right)^2;$$

a qual, para $K = \infty$, dá-nos

$$R = o.$$

Sendo nulla a resistencia do ar, o movimento do corpo será uniformemente accelerado. Para termos as equações d'este movimento, façamos, pela fórmula de Maclaurin, os

desenvolvimentos em série das funcções exponenciaes que se acham nas equações (3) e (4).

Teremos:

$$e^{\frac{gt}{K}} = 1 + \frac{gt}{K} + \frac{g^2 t^2}{2K^2} + \frac{g^3 t^3}{6K^3} + etc.,$$

$$e^{-\frac{gt}{K}} = 1 - \frac{gt}{K} + \frac{g^2 t^2}{2K^2} - \frac{g^3 t^3}{6K^3} + etc.;$$

d'onde,

$$e^{\frac{gt}{K}} - e^{-\frac{gt}{K}} = 2\left(\frac{gt}{K} + \frac{g^3 t^3}{6K^3} + etc.\right),$$

$$e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}} = 2\left(1 + \frac{g^2 t^2}{2K^2} + \frac{g^4 t^4}{24K^4} + etc.\right)$$

portanto,

$$lg\,\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}\right) = lg\left(1 + \frac{g^2 t^2}{2K^2} + \frac{g^4 t^4}{24K^4} + etc\right) = lg\left(1+z\right),$$

sendo

$$z = \frac{g^2 t^2}{2K^2} + \frac{g^4 t^4}{24K^4} + etc.$$

Por ser, pela fórmula de Maclaurin,

$$lg\left(1+z\right) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + etc.,$$

teremos

$$lg\left(1 + \frac{g^2 t^2}{2K^2} + \frac{g^4 t^4}{24K^4} + etc\right) = \frac{g^2 t^2}{2K^2} + \frac{g^4 t^4}{24k^4} + etc.;$$

d'onde,

$$lg\,\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}\right) = \frac{g^2 t^2}{2K^2} + \frac{g^4 t^4}{24K^4} + etc.$$

Substituindo estes resultados nas equações (3) e (4), teremos

$$v = \frac{K\left(e^{\frac{gt}{K}} - e^{-\frac{gt}{K}}\right)}{e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}} = \frac{gt + \frac{g^3t^3}{6K^2} + \text{etc.}}{1 + \frac{g^2t^2}{2K^2} + \frac{g^4t^4}{24K^4} + \text{etc.}},$$

$$s = \frac{K^2}{g}\, lg\, \frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}\right) = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{g^3t^4}{24K^2} + \text{etc.}\ ;$$

d'onde, fazendo agora a hypothese $K = \infty$, teremos

$$v = gt\ ,\ s = \frac{1}{2}gt^2\ ,$$

que são, como sabemos, as equações d'um movimento uniformemente accelerado.

325. Consideremos o movimento vertical, de baixo para cima, de um solido espherico em um meio que resista como o quadrado da velocidade.

Suppondo as mesmas notações precedentes, a força motriz do movel será:

$$F = -mg - R,$$

por serem a gravidade e a resistencia do ar duas forças dirigidas em sentido contrario ao do movimento. A força acceleratriz será:

$$\varphi = \frac{F}{m} = -g - \frac{R}{m}\ ;$$

d'onde, por ser tambem, em um movimento rectilineo qualquer,

$$\varphi = \frac{dv}{dt},$$

teremos:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{R}{m}.$$

Suppondo que

$$\frac{R}{m} = \frac{gv^2}{K^2},$$

a equação do movimento será:

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{gv^2}{K^2}$$

ou, separando as variaveis,

$$\frac{gdt}{K} = -\frac{Kdv}{K^2+v^2};$$

d'onde, integrando, teremos

$$\frac{gt}{K} = -\int \frac{Kdv}{K^2+v^2} = -\int \frac{\frac{dv}{K}}{1+\frac{v^2}{K^2}} = -\,arctg\,\frac{v}{K} + C,$$

sendo C uma constante. Para determinal-a supponhamos que, para $t = o$, resulte $v = v_0$, v_0 sendo a velocidade inicial do movel. Teremos:

$$o = -\,arctg\,\frac{v_0}{K} + C;$$

d'onde,

$$C = arctg\,\frac{v_0}{K};$$

portanto,

$$arctg\,\frac{v}{K} = arctg\,\frac{v_0}{K} - \frac{gt}{K}.$$

Tal é a relação entre a velocidade e o tempo, dada implicitamente. Para acharmos a expressão da velocidade em

funcção explicita do tempo, isto é, para resolvermos a equação precedente, façamos

$$p = arctg\,\frac{v_0}{K},\quad q = arctg\,\frac{v}{K}\,; \qquad (6)$$

d'onde, a nossa equação será :

$$q = p - \frac{gt}{K}\,;$$

portanto,

$$tg.q = tg\left(p - \frac{gt}{K}\right) = \frac{tg.p - tg.\,\frac{gt}{K}}{1 + tg.\,p\,tg.\,\frac{gt}{K}}.$$

Mas das relações (6) deduz-se :

$$\frac{v_0}{K} = tg\,p,\ \frac{v}{K} = tg\,q\,;$$

logo,

$$v = \frac{v_0 - Ktg\,\frac{gt}{K}}{1 + \frac{v_0}{K}\,tg\,\frac{gt}{K}}.$$

Por ser

$$tg\,\frac{gt}{K} = \frac{sen\,\frac{gt}{K}}{cos\,\frac{gt}{K}},$$

resultará, finalmente,

$$v = \frac{K\left(v_0\,cos\,\frac{gt}{K} - K\,sen\,\frac{gt}{K}\right)}{v_0\,sen\,\frac{gt}{K} + K\,cos\,\frac{gt}{K}}. \qquad (7)$$

326. Multiplicando esta expressão por dt, teremos:

$$vdt = \frac{K\left(v_0\,cos\,\frac{gt}{K} - K\,sen\,\frac{gt}{K}\right)}{v_0\,sen\,\frac{gt}{K} + K\,cos\,\frac{gt}{K}}\,dt\,;$$

d'onde, por ser, n'um movimento rectilineo qualquer,

$$ds = vdt,$$

teremos :

$$ds = \frac{K\left(v_0 \cos \frac{gt}{K} - K \operatorname{sen} \frac{gt}{K}\right)}{v_0 \operatorname{sen} \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}} dt.$$

Integrando, vem :

$$s = \int \frac{K\left(v_0 \cos \frac{gt}{K} - K \operatorname{sen} \frac{gt}{K}\right)}{v_0 \operatorname{sen} \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}} dt =$$

$$= \frac{K^2}{g} \int \frac{\frac{g}{K}\left(v_0 \cos \frac{gt}{K} - K \operatorname{sen} \frac{gt}{K}\right)}{v_0 \operatorname{sen} \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}} dt =$$

$$= \frac{K^2}{g} lg \left(v_0 \operatorname{sen} \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}\right) + C,$$

sendo C uma constante. Para determinal-a, supponhamos que, para $t = o$, resulte $s = o$. Teremos :

$$o = \frac{K^2}{g} lg\, K + C;$$

d'onde,

$$C = - \frac{K^2}{g} lg\, K;$$

portanto,

$$s = \frac{K^2}{g} lg \left(v_0 \operatorname{sen} \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}\right) - \frac{K^2}{g} lg\, K;$$

ou, finalmente,

$$s = \frac{K^2}{g} lg \left(\frac{v_0}{K} \operatorname{sen} \frac{gt}{K} + \cos \frac{gt}{K}\right). \qquad (8)$$

Tal será a relação finita entre o espaço e o tempo.

327. Por ser, n'um movimento rectilineo qualquer,

$$\varphi = \frac{vdv}{ds},$$

teremos :

$$vdv = \varphi\, ds = -\left(g + \frac{gv^2}{K^2}\right) ds,$$

por causa do precedente valor da força acceleratriz do movimento. D'esta equação deduz-se:

$$gds = -\frac{K^2\, vdv}{K^2 + v^2}.$$

Integrando, vem :

$$gs = -\int \frac{K^2\, vdv}{K^2 + v^2} = -\frac{K^2}{2}\int \frac{2\, vdv}{K^2 + v^2} = -\frac{K^2}{2}\, lg\, (K^2 + v^2) + C,$$

sendo C uma constante. Para determinal-a, supponhamos que, para $s = o$, resulte $v = v_0$, v_0 sendo uma velocidade inicial. Teremos :

$$o = -\frac{K^2}{2}\, lg \left(K^2 + v_0^2\right) + C;$$

d'onde,

$$C = \frac{K^2}{2}\, lg \left(K^2 + v_0^2\right);$$

portanto, teremos :

$$gs = \frac{K^2}{2}\, lg \left(K^2 + v_0^2\right) - \frac{K^2}{2}\, lg \left(K^2 + v^2\right);$$

ou, finalmente :

$$s = \frac{K^2}{2\, g}\, lg\, \frac{K^2 + v_0^2}{K^2 + v^2} \qquad (9)$$

Tal é a relação entre o espaço e a velocidade do movel.

328. Determinemos a altura maxima h a que o movel chegará em sua subida. Para isto, façamos nas equações (7) e (9) $v = o$ e designemos por θ o tempo em que o movel percorre a altura h. Teremos:

$$v_0 \cos \frac{g\,\theta}{K} - K \operatorname{sen} \frac{g\,\theta}{K} = o,$$

$$h = \frac{K^2}{2g}\, lg\, \frac{K^2 + v_0^2}{K^2};$$

d'onde, a primeira d'estas equações dá-nos:

$$\frac{v_0}{K} = tg\, \frac{g\,\theta}{K};$$

portanto,

$$g\, \frac{\theta}{K} = arctg\, \frac{v_0}{K};$$

d'onde,

$$\theta = \frac{K}{g}\, arctg\, \frac{v_0}{K}.$$

Attingida a altura h, o movel voltará ao ponto de partida e o seu movimento será definido pelas equações (3), (4) e (5). Designando por v'_0 a velocidade do movel ao chegar a esse ponto, teremos, fazendo $s = h$ e $v = v'_0$ na equação (5), a relação seguinte:

$$h = \frac{K^2}{2g}\, lg\, \frac{K^2}{K^2 - v'^2_0};$$

d'onde, comparando este valor de h, correspondente á quéda do grave, com o valor precedente, correspondente á subida, teremos:

$$\frac{K^2}{2g}\, lg\, \frac{K^2 + v_0^2}{K^2} = \frac{K^2}{2g}\, lg\, \frac{K^2}{K^2 - v'^2_0};$$

portanto,

$$\frac{K^2 + V_0^2}{K^2} = \frac{K^2}{K^2 - v_0'^2}$$

d'onde,

$$v_0' = \frac{v_0 K}{\sqrt{v_0^2 + K^2}},$$

expressão que nos mostra que v_0' será uma quantidade sempre menor que v_0, isto é, que a velocidade do movel ao voltar a seu ponto de partida é sempre menor que a sua velocidade inicial.

329. Designando por θ' o tempo da quéda do grave, a equação (2)

$$\frac{2gt}{K} = lg\,\frac{K + v}{K - v}$$

dá-nos, pela substituição de t por θ' e de v por v_0', a equação seguinte:

$$\frac{2g\theta'}{K} = lg\,\frac{K + v_0'}{K - v_0'};$$

d'onde,

$$\theta' = \frac{K}{2g}\,lg\,\frac{K + v_0'}{K - v_0'} = \frac{K}{2g}\,lg\,\frac{\sqrt{v_0^2 + K^2} + v_0}{\sqrt{v_0^2 + K^2} - v_0},$$

por causa do valor de v_0, dado precedentemente. Multiplicando os dois termos da fracção comprehendida sob o logarithmo pelo factor

$$\sqrt{v_0^2 + K^2} - v_0,$$

teremos:

$$\theta' = \frac{K}{2g}\,lg\,\frac{K^2}{(\sqrt{v_0^2 + K^2} - v_0)^2} = \frac{K}{2g}\,lg\left(\frac{K}{\sqrt{v_0^2 + K^2} - v_0}\right)^2 =$$

$$= \frac{K}{g}\,lg\,\frac{K}{\sqrt{v_0^2 + K^2} - v_0}.$$

Designando por T o tempo total $\theta + \theta'$ da subida e da quéda do projectil, teremos:

$$T = \theta + \theta' = \frac{K}{g}\,arctg\,\frac{v_0}{K} + \frac{K}{g}\,lg\,\frac{K}{\sqrt{v_0^2 + K^2} - v_0}$$

ou, finalmente,

$$T = \frac{K}{g}\left(arctg\,\frac{v_0}{K} + lg\,\frac{K}{\sqrt{v_0^2 + K^2} - v_0}\right).$$

Esta fórmula serve tambem para dar-nos, com muita approximação, o valor de K, para uma esphera dada. Com effeito, o tempo T e a velocidade inicial v_0 sendo dados pela experiencia e sendo conhecida a constante g, só ficará incognita na equação precedente a quantidade K. Tal será um meio de determinar esta constante.

330. Si na equação (7) substituirmos as funcções circulares pelos respectivos desenvolvimentos em série, teremos:

$$v = \frac{K\left(v_0 \cos \frac{gt}{K} - K \operatorname{sen} \frac{gt}{K}\right)}{v_0 \operatorname{sen} \frac{gt}{K} + K \cos \frac{gt}{K}} =$$

$$= \frac{v_0\left(1 - \frac{g^2t^2}{1.\,2.\,K^2} + \frac{g^4t^4}{1.\,2.\,3.\,4.\,K^4} + \text{etc.}\right) - K\left(\frac{gt}{K} - \frac{g^3t^3}{1.\,2.\,3.\,K^3} + \text{etc.}\right)}{\frac{v_0}{K}\left(\frac{gt}{K} - \frac{g^3t^3}{1.\,2.\,3.\,K^3} + \text{etc.}\right) + \left(1 - \frac{g^2t^2}{1.\,2.\,K^2} + \text{etc.}\right)}$$

ou, para simplificar,

$$v = \frac{v_0(1 + A) - (gt + B)}{C + (1 + D)}$$

sendo A, B, C e D quantidades que se annullam quando fizermos $K = \infty$.

Fazendo esta hypothese, teremos:

$$v = v_0 - gt.$$

Tal será a expressão da velocidade adquirida pelo movel quando fizermos abstracção da resistencia do ar. Para termos a relação entre o espaço e o tempo, tomemos a equação (8)

$$s = \frac{K^2}{g} \lg \left(\frac{v_0}{K} \operatorname{sen} \frac{gt}{K} + \cos \frac{gt}{K}\right).$$

Fazendo a substituição das funcções circulares pelos respectivos desenvolvimentos em série, virá :

$$s = \frac{K^2}{g} lg \left[\frac{v_0}{K} \left(\frac{gt}{K} - \frac{g^3 t^3}{1.2.3.K^3} + etc \right) + \left(1 - \frac{g^2 t^2}{1.2.K^2} + etc. \right) \right]$$

ou, o que é o mesmo,

$$s = \frac{K^2}{g} lg \left[1 - \frac{g^2 t^2}{1.2.K^2} + etc. + \frac{v_0 gt}{K^2} - \frac{v_0 g^3 t^3}{1.2.3.K^3} + etc. \right] =$$

$$= \frac{K^2}{g} lg \left(1 + z \right) = \frac{K^2}{g} \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - etc. \right),$$

sendo

$$z = \frac{v_0 gt}{K^2} - \frac{g^2 t^2}{1.2.K^2} + etc.$$

Portanto,

$$s = \frac{K^2}{g} \left(\frac{v_0 gt}{K^2} - \frac{g^2 t^2}{1.2.K^2} + etc. \right) -$$

$$- \frac{K^2}{2g} \left(\frac{v_0 gt}{K^2} - \frac{g^2 t^2}{1.2.K^2} + etc. \right)^2 + etc.$$

ou

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 + E,$$

sendo E uma quantidade que se annulla quando fizermos $K = \infty$. Fazendo esta hypothese, virá :

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2,$$

que é, como sabemos, a equação de um movimento uniformemente retardado. E' este, pois, o movimento de ascensão de um solido espherico, no caso em que é nulla a resistencia do ar.

331. Quando o movimento de um corpo é muito lento e sua velocidade não attinge um metro por segundo, a resistencia do ar póde ser supposta como proporcional a

essa velocidade. Si considerarmos a quéda de um solido espherico, a equação differencial do seu movimento será:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{gv}{K},$$

K sendo uma velocidade constante, já definida precedentemente. Separando as variaveis, teremos :

$$\frac{gdt}{K} = \frac{dv}{K - v}.$$

Integrando, vem:

$$\frac{gdt}{K} = -lg\,(K - v) + C,$$

sendo C uma constante. Para determinal-a, supponhamos que, para $t = o$, resulte $v = o$. Teremos :

$$o = -\,lg\,K + C\,;$$

d'onde,

$$C = lg\,K.$$

Portanto,

$$\frac{gt}{K} = lg\,\frac{K}{K - v}\,;$$

d'onde chamando e a base dos logarithmos de Neper, resultará:

$$e^{\frac{gt}{K}} = \frac{K}{K - v}\,;$$

d'onde

$$v = \frac{K\left(e^{\frac{gt}{K}} - 1\right)}{e^{\frac{gt}{K}}} = K\left(1 - e^{-\frac{gt}{K}}\right). \qquad (10)$$

Por ser tambem

$$v = \frac{ds}{dt},$$

teremos:

$$ds = K\left(1 - e^{-\frac{gt}{K}}\right)dt.$$

Integrando, vem :

$$s = Kt - K\int e^{-\frac{gt}{K}}dt = Kt + \frac{K^2}{g}e^{-\frac{gt}{K}} + C,$$

sendo C uma constante que será determinada pela condição de termos, para $t = o$, $s = o$. D'onde,

$$o = \frac{K^2}{g} + C;$$

portanto,

$$s = Kt - \frac{K^2}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{K}}\right) \qquad (11)$$

Tal será a equação finita do movimento.

332. Fazendo abstracção da gravidade e suppondo a resistencia do ar proporcional a uma potencia da velocidade, cujo expoente seja menor que a unidade, o problema do movimento de um corpo em um meio resistente apresenta um caso singular.

Com effeito, a resistencia do ar sendo a unica força que é supposta actuar sobre o movel e sendo esta resistencia dirigida em sentido contrario ao do movimento, façamos a hypothese

$$\varphi = -2v^{\frac{1}{2}};$$

d'onde, por ser tambem

$$\varphi = \frac{dv}{dt},$$

teremos:

$$\frac{dv}{dt} = -2\sqrt{v}. \qquad (12)$$

Separando as variaveis, virá :

$$dt = -\frac{dv}{2\sqrt{v}}.$$

Integrando, resultará:

$$t = -\int \frac{dv}{2\sqrt{v}} = -\sqrt{v} + C,$$

sendo C uma constante. Para determinal-a, supponhamos a condição de ser $v = v_0$ para $t = 0$.

Teremos :

$$0 = -\sqrt{v_0} + C;$$

d'onde,

$$C = \sqrt{v_0} ;$$

portanto,

$$t = \sqrt{v_0} - \sqrt{v} ;$$

d'onde,

$$v = (\sqrt{v_0} - t)^3. \qquad (13)$$

Por ser tambem

$$v = \frac{ds}{dt},$$

teremos:

$$s = \int (\sqrt{v_0} - t)^2 \, dt = v_0 t - \sqrt{v_0}\, t^2 + \frac{t^3}{3} + C,$$

sendo C uma constante. Para determinal-a, supponhamos que $s = o$, para $t = o$.

Teremos:

$$C = o\,;$$

d'onde,

$$s = v_0\,t - \sqrt{v_0}\;t^2 + \frac{t^3}{3}\;;$$

ou, sommando e subtrahindo uma mesma quantidade ao segundo membro d'esta equação,

$$s = \frac{v_0\sqrt{v_0}}{3} - \frac{v_0\sqrt{v_0}}{3} + v_0 t - \sqrt{v_0}\,.\,t^2 + \frac{t^3}{3}$$

ou, finalmente,

$$s = \frac{v_0\sqrt{v_0}}{3} - \frac{(\sqrt{v_0} - t)^3}{3}\,. \qquad (14)$$

333. A fórmula (13)

$$v = (\sqrt{v_0} - t)^2\,,$$

dá-nos: para $t = o$, $v = v_0$; para $t = \sqrt{v_0}$, $v = o$; isto é, que a velocidade diminue desde a origem do movimento até o instante que corresponde á $t = \sqrt{v_0}$. Além d'este instante, o movimento continúa no mesmo sentido e a velocidade augmenta indefinidamente.

Mas, si a velocidade é nulla para $t = \sqrt{v_0}$, a força acceleratriz será tambem nulla para este mesmo tempo; portanto, o movel deveria parar no fim do tempo $t = \sqrt{v_0}$ e ficar em repouso. E', pois, singular a circumstancia achada, de que, *além d'este tempo, o movimento continuará no mesmo sentido e a velocidade augmentará indefinidamente.*

Ora, examinando a equação (12)

$$\frac{dv}{dt} = -2\sqrt{v}\,,$$

vemos claramente que esta equação differencial do movimento admitte a *solução particular* $v = o$; portanto, a sua *solução completa* será o systema das duas equações

$$v = (\sqrt{v_0} - t)^2 \text{ e } v = 0.$$

Assim, o problema será resolvido: de $t = o$ á $t = \sqrt{v_0}$, pela primeira d'estas equações; além do instante que corresponde a $t = \sqrt{v_0}$, isto é, para $t > \sqrt{v_0}$, pela *solução particular* dada pela equação $v = o$.

Quando $t = o$, a equação (14) dá-nos: $s = o$; e quando $t = \sqrt{v_0}$, teremos:

$$s = \frac{v_0 \sqrt{v_0}}{3};$$

isto é, que *durante o intervallo de tempo comprehendido desde a origem do movimento até o instante em que a velocidade annulla-se, o movel descreve, animado d'um movimento continuamente retardado, um espaço igual a* $\frac{v_0 \sqrt{v_0}}{3}$, *na extremidade do qual elle pára e fica em repouso.*

Tal é o exemplo que nos mostra a utilidade das *soluções particulares* nos problemas da dynamica. Mas, convém que digamos, a hypothese formulada n'este exemplo não tem realmente logar na natureza.

334. Consideremos o movimento d'um grave M no vacuo (fig. 119), suppondo que a quéda se realize d'uma grande altura AO para que possamos apreciar a variação da gravidade.

Sejam r o raio OB da terra; g a acceleração da gravidade na superficie d'este globo, isto é, no ponto B; a a distancia do ponto inicial A ao ponto O, centro da terra; finalmente, x o espaço AM percorrido pelo movel no tempo t.

No ponto M, chamando φ a acceleração da gravidade e suppondo que a sua intensidade varie na razão inversa

do quadrado da distancia do corpo ao centro da terra, teremos :

$$\varphi : g :: r^2 : (a - x)^2 ;$$

d'onde,

$$\varphi = \frac{gr^2}{(a - x)^2} .$$

Por ser tambem

$$\varphi = \frac{d^2 x}{dt^2} ,$$

virá:

$$\frac{d^3 x}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a - x)^2} . \qquad (15)$$

Multiplicando os dois membros d'esta equação por $2dx$, teremos :

$$\frac{2\, dx\, d^2 x}{dt^2} = \frac{2\, gr^2\, dx}{(a - x)^2}$$

ou

$$d \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2\, gr^2\, d \left(\frac{1}{a - x} \right)$$

ou ainda

$$dv^2 = 2\, gr^2\, d \left(\frac{1}{a - x} \right).$$

Integrando, vem:

$$v^2 = 2\, gr^2 . \frac{1}{a - x} + C ,$$

sendo C uma constante. Para determinal-a, supponhamos que, para $t = o$, resulte $v = o$ e $x = o$.

Teremos:

$$0 = \frac{2\, gr^2}{a} + C ;$$

portanto, a equação precedente será :

$$v^2 = 2\, gr^2 \left(\frac{1}{a - x} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2\, gr^2}{a} . \frac{x}{(a - x)} . \qquad (16)$$

Tal é a fórmula que nos fará conhecer a velocidade adquirida pelo movel a uma distancia x de seu ponto de partida.

Ella nos mostra que a velocidade cresce quando o espaço augmenta.

335. Fazendo

$$x = AB = a - r = h,$$

teremos

$$v^2 = 2\,gh\,\frac{r}{a}\,;$$

d'onde,

$$v = \sqrt{2\,gh}\,\sqrt{\frac{r}{a}}\,.$$

O simples exame d'esta fórmula nos mostra que, por ser $r < a$, a velocidade do movel ao chegar no ponto B é menor que a que elle possuiria cahindo da mesma altura h, si a gravidade fosse em toda esta altura a mesma que na superficie da terra.

336. Quando $x = a$, a equação (16) dá-nos :

$$v^2 = \frac{2\,gr^2}{0}$$

d'onde,

$$v = \infty\,;$$

isto é, si toda a massa da terra fosse a de seu centro O, a velocidade adquirida pelo movel ao chegar a este ponto seria infinitamente grande.

337. Por ser tambem

$$v = \frac{dx}{dt},$$

a equação (16) dá-nos a seguinte :

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2\,gr^2}{a}\cdot\frac{x}{(a - x)}\,;$$

d'onde, separando as variaveis, virá :

$$\sqrt{\frac{2\,gr^2}{a}}.\ dt = \frac{(a - x dx}{\sqrt{ax - x^2}} \tag{17}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\sqrt{\frac{2\,gr^2}{a}}.\ dt = \frac{\left(\frac{1}{2}\,a - x dx\right)}{\sqrt{ax - x^2}} + \frac{\frac{1}{2}\,a dx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

Mas, evidentemente, temos :

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\,a - x\right)dx}{\sqrt{ax - x^2}} = d\sqrt{ax - x^2},$$

$$\frac{\frac{1}{2}\,a dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{1}{2}\,a\,d\,arc\,cos\,\frac{a - 2x}{a};$$

portanto, a equação (17) será :

$$\sqrt{\frac{2\,gr^2}{a}}\,dt = d.\sqrt{ax - x^2} + \frac{1}{2}\,ad.\ arc\,cos\,\frac{a - 2x}{a};$$

d'onde, integrando, vem:

$$\sqrt{\frac{2\,gr^2}{a}}.\ t = \sqrt{ax - x^2} + \frac{1}{2}\,a.\,ar\,cos\,\frac{a - 2x}{a} + C,$$

sendo C uma constante. Para determinal-a, supponhamos que, para $t = o$, resulte $x = o$.

Teremos:

$$O = \frac{1}{2}\,a.\ arc\,cos\,\frac{a}{a} + C;$$

d'onde,

$$C = 0;$$

portanto, a equação precedente será :

$$\sqrt{\frac{2\,gr^2}{a}}.\ t = \sqrt{ax - x^2} + \frac{1}{2}\,a.\ arc\,cos\,\frac{a - 2x}{a}. \tag{18}$$

Si fosse construida a curva dos espaços representada por esta equação, poderiamos facilmente mencionar uma notavel circumstancia do movimento rectilineo que estamos considerando; mas, para isto, estudemos primeiro a *cycloïde.*

338. De todas as curvas transcendentes é a cycloïde a mais celebre na historia da dynamica, por causa das notaveis propriedades que possue. E' a curva plana descripta por um ponto determinado da circumferencia d'um circulo que róla sem escorregar sobre um eixo indefinido. Este eixo chama-se a *base* da cycloïde e o comprimento d'um arco qualquer do circulo gerador deve ser precisamente igual á parte do eixo sobre que todos os pontos do arco vêm successivamente applicar-se.

Si (fig. 120) NMN' é o circulo gerador e $x'x$ a base da cycloïde, o arco MN será igual á distancia AN. Sejam R o raio OM do circulo gerador, α o angulo variavel MON e (x, y) as coordenadas cartesianas d'um ponto qualquer M.

Teremos:

$$x = AP = AN - PN = AN - MI = R\alpha - R \text{ sen } \alpha,$$

$$y = PM = NI = ON - OI = R - R \cos \alpha ;$$

d'onde, as expressões das coordenadas serão :

$$x = R(\alpha - \text{sen } \alpha), \quad y = R(1 - \cos \alpha).$$

Em virtude do modo de descripção da cycloïde, nada limita o numèro de revoluções do circulo gerador sobre a base indefinida, quer no sentido de A para x, quer em sentido opposto. E', pois, esta curva formada d'uma infinidade de arcos, taes como $AMCB$, perfeitamente iguaes. A distancia AB comprehendida entre os pés d'um arco é igual ao comprimento da circumferencia do circulo gerador ; a ordenada DC correspondente ao meio de AR é evidentemente igual ao diametro do mesmo circulo e divide o arco ACB em duas partes symetricas.

Si das equações precedentes eliminarmos o angulo α, teremos a equação rectilinea da cycloïde. Para isto, a segunda d'essas equações dá-nos :

$$\cos\alpha = \frac{R-y}{R};$$

d'onde,

$$\alpha = \text{arc}\cos\frac{R-y}{R}.$$

Por ser

$$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

teremos

$$\text{sen}\,\alpha = 1 - \sqrt{\left(\frac{R-y}{R}\right)^2} = \frac{\sqrt{2R-y^2}}{R};$$

portanto, resultará :

$$x = R(\alpha - \text{sen}\,\alpha) = R\,\text{arc}\cos\frac{R-y}{R} - \sqrt{2Ry-y^2}.$$

Tal é a equação finita da cycloïde, em coordenadas rectangulas. Differenciando-a, teremos

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R-y}{y}}, \qquad (19)$$

que é a equação differencial d'essa curva. Esta expressão é exactamente a do coefficiente angular da tangente a um ponto qualquer da cycloïde. Quando $y = 2R$, o que tem logar nos vertices dos differentes arcos, ter-se-ha

$$\frac{dy}{dx} = 0;$$

isto é, que a tangente será parallela á base AB. Quando $y = 0$, o que tem logar nos pés dos differentes arcos, virá :

$$\frac{dy}{dx} = \infty;$$

isto é, que a tangente será perpendicular á base AB.

339. Agora prosigamos na questão de que nos occupavamos, isto é, construamos a curva dos espaços representada pela equação (18). Para isto, sejam (fig. 121) Ay perpendicular á Ax e OD parallela á Ay. Supponhamos que uma circumferencia de diametro igual á AO róle sem escorregar sobre a recta OD. N'este movimento o ponto A descreverá a cycloïde AND, cuja equação differencial será:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{AO - x}{x}},$$

por ser o eixo dos y tangente ao vertice da curva. Fazendo $AO = a$, teremos :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a - x}{x}}$$

ou, multiplicando a fracção sob o radical por $a - x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{\sqrt{ax - x^2}};$$

d'onde,

$$dy = \frac{(a - x)\, dx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

Comparando esta equação com a equação (17), teremos

$$dy = \sqrt{\frac{2\,gr^2}{a}}\,.dt\,;$$

d'onde, integrando, vem :

$$y = t\sqrt{\frac{2gr^2}{a}} + C,$$

sendo C uma constante. Para determinal-a, supponhamos que, para $t = o$, resulte $y = o$. Teremos

$$C = o\,;$$

portanto, a equação precedente será:

$$y = t\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}.$$

Comparando esta equação com a equação (18) vemos que ella é representada por uma cycloïde em que o eixo dos y é a tangente ao seu vertice. Da equação precedente deduz-se:

$$t = \frac{y}{r}\sqrt{\frac{2g}{a}};$$

isto é, que *o tempo empregado pelo movel a percorrer o espaço AM é proporcional á ordenada correspondente da cycloïde.*

340. Quando a altura de quéda h do grave é diminuta em relação ao raio r da terra, as equações (16) e (18) correspondem ás d'um movimento uniformemente accelerado. Com effeito, desprezando a altura h em relação ao raio r, teremos

$$a = r;$$

d'onde, a equação (16)

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{x}{a - x},$$

se reduzirá á forma seguinte :

$$v^2 = \frac{2gr^2}{r} \cdot \frac{x}{r - x};$$

mas, si desprezamos a altura h em relação ao raio da terra, é claro que deveremos tambem desprezar o espaço x em relação ao mesmo raio r; portanto, a equação precedente será:

$$v^2 = 2gx.$$

Tal será a primeira equação do movimento. Para termos a segunda, notemos que, na hypothese feita, podemos estabelecer a igualdade seguinte :

$$arc \cos \frac{a - 2x}{a} = arc \operatorname{sen} \frac{2\sqrt{ax - x^2}}{a};$$

d'onde, a equação (18)

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\ t = \sqrt{ax - x^2} + \frac{1}{2} a.\ arc\ cos\ \frac{a - 2x}{a},$$

tomará a fórma seguinte :

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\ t = \sqrt{ax - x^2} + \frac{1}{2} a.\ arc\ sen\ \frac{2\sqrt{ax - x^2}}{a};$$

mas, o seno podendo, n'este caso, ser tomado pelo respectivo arco, virà:

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\ t = 2\sqrt{ax - x^2}\ ;$$

d'onde, elevando os dois membros d'esta equação ao quadrado, teremos:

$$\frac{2gr^2}{a}\ t^2 = 4\left(ax - x^2\right).$$

Fazendo $a = r$ e simplificando, vem

$$gr.\ t^2 = 2\ (r - x)\ x\ ;$$

d'onde, desprezando o espaço x em relação ao raio r, resultará, finalmente:

$$x = \frac{1}{2}\ gt^2,$$

que é a equação procurada.

CAPITULO II

THEORIA DO MOVIMENTO CURVILINEO

1. MOVIMENTO DE UM PONTO LIVRE

341. O objecto d'esta theoria sendo ainda o estudo especial da translação dos corpos, nós os consideraremos como si fossem simples pontos materiaes. Foi no estudo do movimento curvilineo que Galileo descobriu a segunda lei fundamental da mecanica, necessaria á elaboração d'essa theoria. Para bem a comprehendermos, para que fiquem bem claras em nosso espirito as questões geraes do movimento curvilineo, começaremos a nossa exposição pela *theoria do movimento de um projectil no vacuo*. Ella servirá de typo ao movimento de um ponto livre, cujo estudo geral será então feito com a maior simplicidade.

342. *Movimento de um projectil no vacuo.*— Consideremos um projectil partindo do repouso e atirado com uma velocidade v_0, obliqua á direcção do horizonte.

Seja $A\ L$ (fig. 122) a direcção d'esta velocidade inicial. Supponhamos que a curva $A\ B\ C\ D$ seja a trajectoria descripta pelo movel sob a acção combinada da impulsão inicial e da força da gravidade.

Supponhamos mais, que se faça abstracção da resistencia do meio e de qualquer outra acção modificadora do movimento. A trajectoria supposta existirá evidentemente no plano vertical que passa por $A\ L$ e esta recta será, na origem do movimento, tangente á trajectoria. N'este plano, consideremos dois eixos rectangulares fixos Ax e Ay e

tomemos o eixo Ay dirigido em sentido contrario ao da gravidade.

Em virtude da lei de Galileo, o movel terá, em cada instante, o movimento resultante da combinação de dois outros movimentos: de um movimento uniforme, segundo $A\ L$, devido á impulsão inicial, e de um movimento uniformemente accelerado, devido á força da gravidade, em uma direcção constantemente parallela á vertical Ay'. E' assim que, no fim de um tempo qualquer t, o movel devendo percorrer um espaço $A\,n = v_0\, t$, segundo $A\ L$, e um espaço $Am = \frac{1}{2}\, gt^2$, parallelamente á vertical $A\,y'$, percorrerá realmente, no fim do mesmo tempo t, um espaço AM exactamente igual á diagonal do parallelogrammo construido sobre as rectas $A\ m$ e $A\ n$. No fim do tempo t', o movel se achará em M', extremo da diagonal $A\ M'$ do parallelogrammo construido sobre as rectas $A\,n' = v_0\, t'$ e $A\ m' = \frac{1}{2}\, gt'^{\,2}$.

E assim por diante. Unindo os pontos A, M, M', etc., por um traço continuo, obteremos a trajectoria do projectil considerado.

343. Para termos a posição do movel no fim do tempo t, procuremos as expressões das coordenadas x, y de um ponto qualquer M da trajectoria. Seja α o angulo $L\ A\ x$ que a direcção da velocidade inicial faz com o eixo dos x. Decomponhamos esta velocidade inicial v_0 em duas outras velocidades: a primeira $v_0 \cos \alpha$ dirigida segundo o eixo dos x, a segunda $v_0 \operatorname{sen} \alpha$ dirigida segundo o eixo dos y.

Sobre o eixo dos x, o movel sómente será animado da velocidade constante $v_0 \cos \alpha$; mas, sobre o eixo dos y, o movel possuirá duas velocidades differentes: uma constante $v_0 \operatorname{sen} \alpha$, dirigida de A para y; outra variavel gt, dirigida em sentido opposto, devida á gravidade; portanto, teremos:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha\,, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \operatorname{sen} \alpha - g\,t\,; \qquad (1)$$

d'onde, multiplicando cada uma d'estas equações por dt e integrando-as, vem:

$$x = v_0 \cos \alpha\, t + C\,, \quad y = v_0 \operatorname{sen} \alpha\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 + C',$$

sendo C e C' duas constantes. Para determinal-as, devemos ter, para $t = o$, $x = o$ e $y = o$; d'onde, $C = o$ e $C' = o$; portanto, as equações do movimento serão :

$$x = v_0 \cos \alpha\, t\,,\ y = v_0 \operatorname{sen} \alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2. \qquad (2)$$

A primeira d'estas equações é de um movimento uniforme; a segunda é de um movimento uniformemente variado : ellas são as equações dos movimentos das projecções do ponto movel sobre os eixos dos x e dos y.

Para conhecermos a equação da trajectoria, eliminemos o tempo das equações (2). Teremos :

$$y = x\, tg\, \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \qquad (3)$$

Sendo h a altura devida á velocidade inicial v_0, teremos :

$$v_0^2 = 2 g h\,;$$

d'onde a equação precedente tomará a fórma seguinte :

$$y = x\, tg\, \alpha - \frac{x^2}{4 h. \cos^2 \alpha} \qquad (4)$$

Tal é a equação da trajectoria. Como vê-se, ella pertence a uma parabola que tem o seu eixo vertical.

344. Para termos as coordenadas (x_1, y_1) do vertice d'esta parabola, notemos que n'este ponto a ordenada é *maxima*. Portanto, estabelecendo a condição de *maximo*,

$$\frac{dy}{dx} = o\,,$$

a equação (4) dá-nos:

$$tg\, \alpha = \frac{2 x}{4 h \cos^2 \alpha}\,;$$

d'onde, mudando x em x_1 e tirando o seu valor d'esta equação, virá :

$$x_1 = 2 h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \qquad (5)$$

Substituindo este valor na equação (4) em logar de x e mudando y em y_1, teremos:

$$y_1 = h \; sen^2 \alpha. \qquad (6)$$

Taes são as expressões das coordenadas do vertice.

345. Si transportarmos a origem A das coordenadas para o vertice (x_1, y_1) pela substituição de x e y respectivamente por $x + x_1$ e $y + y_1$, a equação (4) se mudará na seguinte:

$$x^2 + (2\,x_1 - 4\,h \; sen\;\alpha \; cos\;\alpha)\,x + 4\,h\;cos^2\alpha\;y + (x_1^2 - 4\,h\;sen\;\alpha \; cos\;\alpha\;x_1 + 4\,h\;^2cos\;\alpha\;y_1) = o;$$

e para termos a equação da parabola referida á tangente ao vertice, devemos estabelecer as condições seguintes:

$$2\,x_1 - 4\,h\;sen\;\alpha\;cos\;\alpha = o,\quad x_1^2 - 4\,h\;sen\;\alpha\;cos\;\alpha\;x_1 + 4\,h\;cos^2\alpha\;y_1 = o;$$

d'onde,

$$x_1 = 2\,h\;sen\;\alpha\;cos\;\alpha,\quad y_1 = h\;sen^2\alpha.$$

Assim, a equação da trajectoria será:

$$x^2 + 4\,h\;cos^2\alpha\;y = o.$$

Fazendo a substituição de y por $-y$, o eixo dos y será tomado no sentido da gravidade. N'este caso, a trajectoria será dada pela equação seguinte:

$$x^2 - 4\,h\;cos^2\alpha\;y = o;$$

d'onde,

$$x^2 = 4\,h\;cos^2\alpha\;y. \qquad (7)$$

Tal é a equação mais simples da trajectoria d'um projectil no vacuo. Ella representa uma parabola cujo parametro será $4\,h\;cos^2\alpha$, o eixo dos x será tangente ao ponto B, vertice da curva e o eixo dos y será dirigido segundo a vertical BQ (fig. 122).

346. A trajectoria encontrando o eixo horizontal no ponto C, procuremos conhecer a distancia $A\ C$. Designando-a por d, teremos:

$$\delta = 2\ A\ Q = 2\ x_1 = 2\ (2\ h\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha\ ) = 2h\ sen\ 2\ \alpha, \qquad (8)$$

a qual chama-se *o alcance* ou *a amplitude do jacto*. Quando $\alpha = 45^o$, $\delta = 2h$; isto é, *o alcance maximo* é o dobro da altura devida á velocidade inicial. *A altura do jacto* ou a *elevação* é dada pela expressão da ordenada do vertice B.

347. A velocidade adquirida pelo projectil em um ponto qualquer de sua trajectoria será calculada pela fórma seguinte :

$$v = \frac{d\,s}{d\,t} = \frac{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ ;$$

d'onde, por causa das equações (1), teremos :

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\,v_0\,g\,sen\ \alpha\ t + g^2\,t^2}. \qquad (9)$$

348. Determinemos agora o tempo necessario ao projectil para chegar ao ponto C de sua trajectoria. N'este ponto, a ordenada é nulla e a abscissa é igual ao alcance; portanto, o tempo procurado será exactamente o mesmo em que o projectil percorresse a distancia δ sómente animado da componente horizontal da velocidade inicial ; isto é, teremos :

$$\delta = v_0\ cos\ \alpha.\ t\ ;$$

d'onde,

$$t = \frac{\delta}{v_0\ cos\ \alpha} = \frac{4\ h\ sen\ \alpha}{v_0}\ ;$$

mas, por ser

$$h = \frac{v_0^2}{2g},$$

teremos para a duração do movimento:

$$t = \frac{2\ v_0\ sen\ \alpha}{g}. \qquad (10)$$

349. Para calcularmos a velocidade inicial, a equação (8) dá-nos:

$$h = \frac{\delta}{2 \; sen \; 2 \; \alpha};$$

mas, tambem,

$$h = \frac{v_0^2}{2g};$$

portanto,

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{\delta}{2 \; sen \; 2 \; \alpha};$$

d'onde,

$$v_0^2 = \frac{g\delta}{sen \; 2 \; \alpha};$$

d'onde,

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\delta}{sen \; 2 \; \alpha}};$$

350. Da equação (10) deduz-se:

$$gt = 2 \; v_0 \; sen \; \alpha$$

Substituindo este valor na equação (9), teremos:

$$v = v_0;$$

isto é, que *a velocidade no ponto C é exactamente a mesma que na origem A do movimento*. Essa velocidade será dirigida segundo a tangente á trajectoria no ponto C e *o angulo de quéda* $T \; C \; x$ será igual ao *angulo de projecção* $L \; A \; x$. Com effeito, da equação (4) deduz-se:

$$\frac{dy}{dx} = tg \, \alpha - \frac{x}{2 \; h \; cos^2 \; \alpha};$$

mas, tambem temos:

$$\frac{dy}{dx} = tg \; T \; C \; x;$$

d'onde,

$$tg \; T \; C \; x = tg \; \alpha - \frac{x}{2 \; h \; cos^2 \; \alpha}$$

Por ser, no ponto C, $x = \delta$, virá:

$$tg\ T\ C\ x = t\ g\ \alpha - \frac{\delta}{2\ h\ \cos^2 \alpha} = -\ tg\ \alpha,$$

depois da substituição do valor de δ. Então resultará:

$$T\ C\ x = -\ L\ A\ x;$$

isto é, que o angulo de quéda é igual ao angulo de projecção, sendo as respectivas aberturas dirigidas em sentidos oppostos.

351. Muitos outros detalhes sobre as circumstancias do movimento dos projectis no vaccuo serão estudados nos *cursos de Balistica*, com mais desenvolvimento, mas o que fica dito é sufficiente.

352. *Equações fundamentaes.* — Seja M um ponto material inteiramente livre no espaço, mas continuamente sujeito á acção d'um systema qualquer de forças. E' claro que, em cada instante, todas estas forças se combinarão em uma resultante unica. Decomponhamos, em cada instante, esta resultante em tres forças X, Y, Z respectivamente parallelas ás tres coordenadas rectangulas (x, y, z) que determinam a posição do movel relativamente a um systema de eixos rectangulares fixos.

Em virtude da segunda lei fundamental da mecanica, o movimento do ponto M, segundo cada eixo, será independente dos movimentos segundo os dois outros eixos coordenados. E como o movimento segundo cada um dos eixos só poderá ser devido á acção da respectiva componente da força acceleratriz, é claro que, em cada instante, o movimento curvilineo poderá ser decomposto em tres movimentos rectilineos, respectivamente parallelos aos tres eixos coordenados. Applicando, pois, a cada um d'estes tres movimentos rectilineos a fórmula que nos dá a medida geral das forças acceleratrizes em um movimento rectilineo qualquer,

$$\varphi = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

teremos:

$$X = \frac{d^2 x}{dt^2},\ Y = \frac{d^2 y}{dt^2},\ Z = \frac{d^2 z}{dt^2},$$

que são as equações geraes do movimento curvilineo d'um ponto livre, devidas a Leonardo Euler.

353. Si m designa a massa do ponto material, as equações do movimento serão:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y = m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

por causa da medida da força motriz (310).

354. As equações differenciaes do movimento d'um ponto livre reduzem as questões da dynamica d'um ponto material a problemas puramente algebricos, quando os dados são convenientemente expressos.

Duas são as questões geraes que abrangem todos os problemas da theoria do movimento curvilineo d'um ponto livre: na primeira, conhecendo-se a lei que rege a força que anima o ponto, determinam-se todas as circumstancias de seu movimento; na segunda, conhecendo-se a trajectoria e a lei do movimento, determina-se a lei das forças capazes de produzil-o.

355. *Primeira questão.*—Qualquer que seja a lei da força que anima continuamente a um ponto livre, a integração das tres equações differenciaes de segunda ordem

$$X = \frac{d^2x}{dt^2},\ Y = \frac{d^2y}{dt^2},\ Z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

nos resolverá a questão, o que pela imperfeição do calculo integral raramente poderá acontecer; mas, uma vez que estas equações sejam integraveis, a determinação das seis constantes arbitrarias far-se-ha tendo-se em vista o estado inicial do movel.

Supponhamos, pois, que, integradas as tres equações precedentes, tenhamos as equações seguintes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x, t) = 0, \\ \varphi(y, t) = 0, \\ \psi(z, t) = 0. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Facilmente concluiremos que d'este systema de equações resultarão as expressões dos valores das coordenadas (x,

y, z) do movel em funcção do tempo ; e si d'essas equações eliminarmos a variavel t, teremos duas equações da fórma seguinte:

$$F(x, y) = 0,$$

$$F_1(x\ z) = 0,$$

que serão as equações da trajectoria do movel.

Quando esta curva fôr plana, é claro que uma d'estas equações não terá logar.

Das equações (11) poderemos calcular as expressões dos valores de

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dz}.$$

Ora, a velocidade do movel, em cada instante, nos será dada pela equação

$$v = \frac{ds}{dt},$$

na qual ds representa um elemento do arco da trajectoria, que poderá ser considerado como uma recta infinitamente pequena, cujas projecções respectivas sobre os tres eixos coordenados serão dx, dy, dz. D'onde por ser

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

teremos:

$$v = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Tal será a expressão da grandeza da velocidade do movel em um ponto qualquer de sua trajectoria.

Quanto á sua direcção, em cada ponto, será dada pelos angulos que a tangente á trajectoria n'esse ponto faz respectivamente com os tres eixos rectangulares.

Designando estes angulos por (α, β, γ), teremos :

$$v \cos \alpha = \frac{dx}{dt}, \quad v \cos \beta = \frac{dy}{dt}, \quad v \cos \gamma = \frac{dz}{dt};$$

d'onde,

$$\cos \alpha = \frac{\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

$$\cos \gamma = \frac{\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

356. *Caso directo das forças centraes.*— O estudo das *forças centraes*, um dos mais importantes da dynamica, por isso que nos descortina o vasto dominio da mecanica celeste, offerece-nos um caso simples da questão, que, d'uma maneira geral, acabamos de considerar.

Supponhamos um ponto material sob a acção d'uma força cuja direcção passa constantemente por um centro fixo e cuja intensidade seja dada por uma funcção da distancia d'esse movel a este centro : quaes serão as circumstancias do movimento ?

Seja AMB (fig. 123) a trajectoria descripta pelo movel em torno do centro fixo C.

Esta curva será necessariamente situada no plano que passa por este centro e pela direcção AV da velocidade inicial.

N'este plano e pelo ponto C tracemos dois eixos rectangulares fixos, dos quaes o eixo dos x passe pelo ponto A, ponto de partida do movel.

Seja M a posição do movel no fim do tempo t e designemos as suas coordenadas CP e PM por x e y.

Sejam, finalmente, r o raio vector CM e R a força acceleratriz, dirigida de M para C e dada por uma funcção qualquer de r.

As equações do movimento serão:

$$X = \frac{d^2x}{dt^2},\ Y = \frac{d^2y}{dt^2};$$

mas tambem, pela decomposição da força R no ponto M, teremos:

$$-X = R \cos(R, x),\ -Y = R \cos(R, y);$$

d'onde,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R \cos(R, x),\ \frac{d^2y}{dt^2} = -R \cos(R, y).$$

O triangulo rectangulo CPM dá-nos:

$$x = r \cos(R, x),\ y = r \cos(R, y);$$

d'onde,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r},\ \frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r}. \qquad (12)$$

Multiplicando a primeira d'estas equações por y e a segunda por x, teremos:

$$y\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R}{r}xy,\ x\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{R}{r}xy;$$

d'onde,

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = o$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{d(x\,dy - y\,dx)}{dt^2}dt^2 = o, \text{ ou } d\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\right) = 0;$$

d'onde, integrando e designando por c a constante, virá:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = c$$

ou

$$x\,dy - y\,dx = c\,dt. \tag{13}$$

Multiplicando as equações (12) respectivamente por dx e dy, vem:

$$dx\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R}{r}\,xdx,\; dy\,\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{R}{r}\,y\,dy\,;$$

d'onde,

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} = -\frac{R}{r}\,(x\,dx + y\,dy)\,;$$

mas o triangulo $C\,P\,M$ dá-nos:

$$r^2 = x^2 + y^2\,;$$

d'onde,

$$rdr = xdx + ydy\,;$$

portanto, teremos:

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} = -R\,dr;$$

d'onde,

$$\frac{d\,(dx^2 + dy^2)}{dt^2} = -2R\,dr$$

ou, o que é o mesmo,

$$d\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right) = -2R\,dr\,;$$

d'onde, integrando, vem:

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2\int R\,dr + b, \tag{14}$$

sendo b a constante.

Designando por θ o angulo MCx, teremos:

$$x = r \cos \theta, \; y = r \operatorname{sen} \theta ; \qquad (15)$$

d'onde, differenciando, vem:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \cos \theta \, dr - r \operatorname{sen} \theta \, d\theta, \\ dy &= \operatorname{sen} \theta \, dr + r \cos \theta \, d\theta ; \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

portanto, resultará:

$$x \, dy - y \, dx = r^2 \, d\theta,$$

expressão que, substituida na equação (13), dá-nos:

$$r^2 \, d\theta = cdt, \qquad (17)$$

equação cuja significação geometrica vamos achar.

Si (fig. 124) MM' é o arco infinitamente pequeno descripto pelo raio r, em torno do ponto C, é claro que $r \, d \, \theta$ designará a medida d'este arco; d'onde a expressão

$$r^2 \, d \, \theta = 2 \left(r \, d \, \theta . \frac{1}{2} r \right)$$

representará o dobro da área do sector MCM'.

Chamando, pois, du a área d'este sector, a equação (17) dá-nos:

$$2 \, du = c \, dt ;$$

d'onde, integrando, vem:

$$u = \frac{1}{2} ct,$$

sendo nulla a constante da integração, porque suppomos a área $u = o$ para $t = o$. Traduzindo em linguagem vulgar a equação precedente, vemos que *o raio vector que une o movel ao centro fixo descreve áreas sempre proporcionaes aos tempos, quaesquer que sejam a lei da força e a natureza da trajectoria.*

Elevando ao quadrado as equações (16) e sommando os resultados, membro a membro, vem :

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2, \tag{18}$$

expressão que, substituida na equação (14), dá-nos :

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = -2\int R\, dr + b. \tag{19}$$

357. As equações (17) e (19) dão-nos os valores de θ e r em funcção de t, os quaes, substituidos nas equações (15), nos permittirão calcular os valores das coordenadas x e y do movel, em cada instante. E uma vez conhecidas as coordenadas do movel em funcção do tempo, o problema da determinação do movimento será sempre resolvido, sem que seja mais preciso o emprego do calculo integral. Mas, independentemente d'estas indicações e seguindo outra marcha mais simples, poderemos estabelecer, para um caso qualquer, em que a lei da força seja dada por uma funcção qualquer de r, a equação da trajectoria e a fórmula da velocidade do movel em um ponto qualquer d'esta curva. Com effeito, para acharmos a trajectoria, eliminemos dt entre as equações (17) e (19). Para isto, da equação (17) o valor de dt será:

$$dt = \frac{r^2}{c}\, d\theta,$$

o qual, substituido na equação (19), dá-nos:

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\,\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right] = -2\int R dr + b\,, \tag{20}$$

que é a equação differencial da trajectoria, estabelecida entre as coordenadas polares r e θ d'um qualquer de seus pontos.

358. Chamando ds o elemento do arco da trajectoria no ponto M e v a velocidade n'este ponto, teremos:

$$v = \frac{ds}{dt};$$

d'onde, por causa da equação (14), virá:

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2\int Rdr + b, \qquad (21)$$

equação que nos fornecerá o valor da velocidade de um ponto qualquer da trajectoria.

359. Facilmente poderemos calcular as componentes da velocidade em um ponto qualquer M, segundo o raio vector MC e a recta MH, perpendicular a este raio. Designando por δ o angulo que a direcção da velocidade, que é a da tangente ao ponto M da curva, faz com o raio vector MC, teremos:

$$\cos\delta = -\frac{dr}{ds};$$

d'onde,

$$\operatorname{sen}\delta = \sqrt{1 - \cos^2\delta} = \frac{\sqrt{ds^2 - dr^2}}{ds};$$

mas, por ser

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2d\theta^2,$$

resultará

$$ds^2 - dr^2 = r^2d\theta^2;$$

portanto,

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{rd\theta}{ds};$$

d'onde, por ser

$$v = \frac{ds}{dt},$$

teremos

$$\cos\delta = -\frac{dr}{vdt}, \quad \operatorname{sen}\delta = \frac{rd\theta}{vdt};$$

portanto, as componentes da velocidade serão:

$$v\cos\delta = -\frac{dr}{dt}, \quad v\operatorname{sen}\delta = r\frac{d\theta}{dt}.$$

360. As constantes arbitrarias b e c serão determinadas pela posição e velocidade iniciaes do movel. Sejam γ a distancia inicial CA, v_0 a velocidade inicial AV e α o angulo CAV que a direcção d'esta velocidade faz com o eixo Ox. A equação (21) dá-nos:

$$v_0^2 = -2\int Rd\gamma + b = b\,, \qquad (22)$$

suppondo que a integral seja nulla para $r = \gamma$. Para determinarmos a constante c tomemos a equação (17), a qual dá-nos:

$$C = \frac{r^2 d\theta}{dt} = r \times \frac{rd\theta}{dt} = rvsen\delta\,;$$

portanto, para $r = \gamma$, $v = v_0$ e $\delta = \alpha$, teremos:

$$C = \gamma\ v_0 sen\alpha. \qquad (23)$$

As outras duas constantes, que forem introduzidas pela integração das equações (17) e (19), serão determinadas de modo que tenhamos $\theta = o$ e $r = \gamma$ quando $t = o$.

Tal é a solução geral do problema do movimento d'um ponto material, sob a acção d'uma força constantemente dirigida para um centro fixo e dada por uma funcção qualquer da distancia r.

361. Os geometras discutiram diversas hypotheses sobre a lei das forças centraes. Consideraram, entre outros, os tres casos seguintes: a força proporcional á distancia do movel ao centro fixo; a força actuando na razão inversa do quadrado d'esta distancia, e a força actuando na razão inversa do cubo d'essa mesma distancia, isto é, em linguagem algebrica,

$$R = \frac{Kr}{\gamma}\,,\quad R = \frac{K\gamma^2}{r^2}\,,\quad R = \frac{K\gamma^3}{r^3}\,,$$

sendo K a constante que exprime o valor de R correspondente á $r = \gamma$; mas apenas estudaremos a segunda

hypothese, por causa da sua grande applicação ao systema do mundo.

362. A equação (20),

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right] = -2 \int R dr + b ,$$

na hypothese de ser a força R definida pela funcção

$$R = \frac{K\gamma^2}{a^2} ,$$

tomará a fórma seguinte:

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right] = -2 \int \frac{K\gamma^2}{r^2} dr + b . \qquad (24)$$

Calculemos primeiro a integral do segundo membro d'esta equação:

$$\int \frac{K\gamma^2}{r^2} d\,r = K\gamma^2 \int r^{-2} d\,r = -\frac{K\gamma^2}{r} + C ,$$

sendo C uma constante que será determinada pela hypothese de que a integral seja nulla para $r = \gamma$. Então teremos:

$$o = -\frac{K\gamma^2}{\gamma} + C;$$

d'onde,

$$C = K\gamma ;$$

portanto,

$$\int \frac{K\gamma^2}{r^2} dr = -\frac{K\gamma^2}{r} + K\gamma . \qquad (25)$$

Substituindo este valor na equação (24) vem:

$$c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right] = \frac{2 K \gamma^2}{r} - 2 K \gamma + b.$$

Fazendo

$$\beta = 2 K \gamma - b, \tag{26}$$

a equação da trajectoria tomará a fórma seguinte :

$$\frac{c^2}{r^4} \cdot \frac{dr^2}{d\theta^2} = - \beta + \frac{2 K \gamma^2}{r} - \frac{c^2}{r^2} ;$$

d'onde, tirando o valor de $d\theta$, teremos:

$$d \theta = \pm \frac{c dr}{r^2 \sqrt{- \beta + \frac{2 K \gamma^2}{r} - \frac{c^2}{r^2}}} .$$

Para integrar esta equação com mais facilidade, façamos:

$$\frac{1}{r} = z ;$$

d'onde,

$$\frac{dr}{r^2} = - dz ,$$

valores que substituidos dão-nos:

$$d\theta = \mp \frac{c\, dz}{\sqrt{- \beta + 2 K \gamma^2 z - c^2 z^2}} = \mp$$

$$= \mp \frac{c\, dz}{\sqrt{\left(- \beta + \frac{K^2 \gamma^4}{c^2} \right) - \left(c z - \frac{K \gamma^2}{c} \right)^2}} .$$

Tal é a equação differencial que devemos integrar. O seu duplo signal indica que as variaveis r e θ podem variar no

mesmo sentido ou em sentido contrario. Para tornal-a immediatamente integravel, façamos as transformações seguintes :

$$d\,\theta = \mp \frac{c\,dz}{\sqrt{-\beta + \frac{K^2\gamma^4}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(cz - \frac{K\gamma^2}{c}\right)^2}{-\beta + \frac{K^2\gamma^4}{c^2}}}};$$

d'onde, fazendo

$$q = \frac{cz - \frac{K\gamma^2}{c}}{\sqrt{-\beta + \frac{K^2\gamma^4}{c^2}}},$$

teremos

$$dq = \frac{cdz}{\sqrt{-\beta + \frac{K^2\gamma^4}{c^2}}};$$

portanto,

$$d\theta = \mp \frac{dq}{\sqrt{1-q^2}};$$

d'onde, integrando, vem :

$$\theta = \omega \pm arc\cos q,$$

sendo ω uma constante angular. D'esta equação resulta :

$$\cos(\theta - \omega) = q;$$

d'onde, por causa do valor d'esta variavel auxiliar q, virá :

$$\cos(\theta - \omega) = \frac{cz - \frac{K\gamma^2}{c}}{\sqrt{-\beta + \frac{K^2\gamma^4}{c^2}}} = \frac{c^2 z - K\gamma^2}{\sqrt{K^2\gamma^4 - \beta c^2}}; \qquad (27)$$

d'onde, tirando o valor de z, vem :

$$z = \frac{K\gamma^2 + \sqrt{K^2\gamma^4 - \beta c^2}\cos(\theta - \omega)}{c^2}.$$

Substituindo, finalmente, a variavel z por seu valor $\frac{1}{r}$, teremos:

$$r = \frac{\frac{c^2}{K\gamma^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\beta c^2}{K^2 \gamma^4}} \cdot \cos(\theta - \omega)}, \qquad (28)$$

que é a equação finita da trajectoria do movel, em coordenadas polares.

363. Para que possamos bem julgar da natureza do logar geometrico que esta ultima equação representa, façamos:

$$e = \sqrt{1 - \frac{\beta c^2}{K^2 \gamma^4}}, \quad a(1 - e^2) = \frac{c^2}{K\gamma^2}, \qquad (29)$$

valores que substituidos na equação (28) dão-nos:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)},$$

que é a equação d'uma *secção conica* referida a um fóco e a um eixo polar, que faz com o eixo que passa por este fóco um angulo igual á ω. Esta secção conica, segundo a geometria algebrica nos ensina, será uma ellipse, uma parabola ou uma hyperbole, conforme o valor da *excentricidade* e. Quando $e < 1$, a trajectoria será uma ellipse; quando $e = 1$, será uma parabola e quando $e > 1$, será uma hyperbole.

Ora, examinando a primeira das equações (29)

$$e = \sqrt{1 - \frac{\beta c^2}{K^2 \gamma^4}},$$

vemos que: e será menor que a unidade quando β fôr uma quantidade positiva; e será igual á unidade, quando β fôr

igual a zero, e e será maior que a unidade quando β fôr uma quantidade negativa. E como a equação (26),

$$\beta = 2\,K\,\gamma - b,$$

combinada com a equação (22),

$$v_0^2 = b\,,$$

dá-nos:

$$\beta = 2\,K\gamma - v_0^{\,2},$$

teremos para valor de β uma quantidade positiva quando $v_0^2 < 2\,K\,\gamma$; β será igual a zero quando $v_0^2 = 2\,K\,\gamma$; finalmente, β será uma quantidade negativa quando $v_0^2 > 2\,K\,\gamma$; caracteres estes que terão respectivamente logar quando a trajectoria do movel fôr uma ellipse, uma parabola ou uma hyperbole.

364. Resulta d'esta discussão que a trajectoria descripta pelo movel sómente dependerá da *grandeza* de sua velocidade inicial, sendo sempre independente da *direcção* d'esta velocidade. Si, pois, differentes moveis, sob a acção de forças centraes que actúam na razão inversa dos quadrados das distancias, partirem d'um mesmo ponto do espaço, com velocidades iguaes em grandeza, todos estes moveis descreverão trajectorias da mesma especie, quaesquer que sejam as direcções em que forem lançados.

365. Representado por h a altura devida á velocidade inicial v_0 e por g a intensidade da gravidade, a constante β será positiva, nulla ou negativa, conforme verifique-se uma das tres condições seguintes:

$$2\,g\,h < 2\,K\gamma\,,\; 2\,g\,h = 2\,K\,\gamma\,,\; 2\,g\,h > 2\,K\gamma\,,$$

por ser

$$v_0^2 = 2\,gh. \qquad (30)$$

E si suppuzermos que a constante K, que representa a medida da força R no ponto A (fig. 123), seja igual á

intensidade g da gravidade, as tres condições precedentes serão substituidas pelas seguintes :

$$h < \gamma \, , \; h = \gamma \, , \; h > \gamma \, ;$$

isto é, que a trajectoria percorrida pelo movel será uma ellipse, uma parabola ou uma hyperbole conforme seja a altura h, devida á velocidade inicial $v_0 = AV$, menor que a distancia inicial $\gamma = CA$, igual a esta distancia ou maior que ella.

366. Para darmos uma solução completa do problema de que nos occupamos, muito longe levariamos este estudo, pois que teriamos agora de considerar os casos em que a trajectoria é uma ellipse, uma parabola ou uma hyperbole. Mas, o nosso intuito não sendo o de fazer, n'este curso de mecanica geral, o estudo d'uma theoria que melhor seria estudada em mecanica celeste, julgamos dever terminar esta exposição do problema das forças centraes, unicamente com o exame do caso em que a trajectoria é uma ellipse, por ser este o caso da natureza.

367. As fórmulas (29),

$$e = \sqrt{1 - \frac{\beta c^2}{K^2 \gamma^4}} \, , \quad a \, (1 - e^2) = \frac{c^2}{K \gamma^2} \, ,$$

determinam os elementos da ellipse definida pela equação

$$r = \frac{a \, (1 - e^2)}{1 + e \cos (\theta - \omega)} \, ,$$

em funcção dos dados do problema.

368. Conhecida a trajectoria do movel, só nos resta calcular a velocidade e a sua posição, em uma época qualquer. Para isto, determinemos as variaveis v, r e θ em funcção de t.

A equação (21),

$$v^2 = - 2 \int R \, dr + b \, ,$$

dá-nos:

$$v^2 = - 2 \int \frac{K \gamma^2}{r^2} \, d \, r + b \, ;$$

d'onde, tendo em vista a equação (25), resultará:

$$v^2 = b - 2K\gamma + \frac{2K\gamma^2}{r};$$

mas, por causa das relações (22) e (30),

$$v_0^2 = b = 2gh,$$

teremos:

$$v^2 = 2gh - 2K\gamma + \frac{2K\gamma^2}{r}. \qquad (31)$$

Para darmos uma fórma mais usual a esta expressão do quadrado da velocidade do movel, lancemos mão das equações (29),

$$e = \sqrt{1 - \frac{\beta c^2}{K^2\gamma^4}}, \quad a(1 - e^2) = \frac{c^2}{K\gamma^2},$$

das quaes a eliminação de e dá-nos a relação seguinte:

$$\beta = \frac{K\gamma^2}{a};$$

mas tambem (26)

$$\beta = 2K\gamma - 2gh;$$

portanto,

$$2gh - 2K\gamma = -\frac{K\gamma^2}{a}.$$

Combinando esta equação com a equação (31), vem:

$$v^2 = K\gamma^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

d'onde, fazendo

$$K\gamma^2 = \mu, \qquad (32)$$

teremos:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \qquad (33)$$

sendo μ a intensidade da força central R á unidade de distancia e a o semi-eixo maior da ellipse.

369. A equação (19),

$$\frac{dr^2 + r^2\, d\,\theta^2}{dt^2} = -2 \int R\, dr + b,$$

combinada com a equação (21),

$$v^2 = -2 \int R\, dr + b,$$

dá-nos:

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2\, d\,\theta^2}{dt^2};$$

a qual, por causa da equação (33), dá-nos:

$$\frac{dr^2 + r^2\, d\,\theta^2}{dt^2} = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Substituindo n'esta equação o valor de $d\theta$ tirado da equação (17),

$$r^2 d\,\theta = c\, dt,$$

resultará a equação seguinte:

$$dt = \frac{r\, dr}{\sqrt{-\frac{\mu}{a} r^2 + 2\,\mu\, r - c^2}};$$

mas, por causa da segunda das equações (29),

$$a\,(1 - e^2) = \frac{c^2}{K\gamma^2}$$

e da equação (32),

$$K\,\gamma^2 = \mu,$$

teremos:

$$dt = \frac{r\, dr}{\sqrt{-\frac{\mu}{a} r^2 + 2\,\mu r - \mu\, a\,(1 - e^2)}}$$

ou, o que é o mesmo,

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}} . \qquad (34)$$

370. Supponhamos que o movel seja o centro de gravidade d'um planeta do nosso systema solar. Sejam $AMBD$ (fig. 125) a sua trajectoria elliptica; O o centro d'esta curva; C e C' os seus dois fócos, sendo C o fóco occupado pelo sol; A o *perihelio* ou o ponto da orbita mais proximo de C; finalmente, B o *aphelio* ou o ponto da orbita mais afastado do centro de gravidade do sol.

Isto pôsto, facilmente vemos que o raio vector $r = CM$ varia desde $CA = a\,(1 - e)$ até $CB = a\,(1 + e)$.

D'aqui resulta que podemos deixar de integrar a equação (34) pelos methodos ordinarios, pois com mais simplicidade empregaremos uma variavel auxiliar u, que satisfaça a equação seguinte:

$$r = a\,(1 - e \cos u)\,; \qquad (35)$$

a qual, differenciada, dá-nos:

$$dr = ae \operatorname{sen} u\, du\,;$$

d'onde, a equação (34) tomará a fórma seguinte:

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}\,dt = (1 - e \cos u)\,du\,;$$

d'onde fazendo

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}},$$

resultará:

$$n\,dt = (1 - e \cos u)\,du\,; \qquad (36)$$

a qual, integrada, dá-nos:

$$nt = u - e \operatorname{sen} u, \qquad (37)$$

sendo nulla a constante da integração, porque suppomos que o tempo seja contado a partir do instante em que o planeta está em seu perihelio. Então, teremos:

$$r = a\,(1 - e)\,;$$

d'onde, por causa da equação (35), resultará:

$$\cos u = 1\,;$$

portanto,

$$u = o, \text{ para } t = o.$$

371. Para acharmos a significação geometrica da variavel auxiliar u, descrevamos uma circumferencia de circulo sobre AB como diametro (fig. 125). Prolonguemos a ordenada MP até o ponto K em que ella encontra a circumferencia. Teremos:

$$r = a - e \times O\,P = a - e \times a \cos A\,O\,K = a\,(1 - e \cos A\,O\,K)\,;$$

mas tambem a equação (35) dá-nos :

$$r = a\,(1 - e \cos u)\,;$$

d'onde,

$$\cos u = \cos A\,O\,K\,;$$

portanto,

$$u = A\,O\,K.$$

E', pois, a variavel auxiliar u uma variavel angular da ellipse.

Os astronomos dão-lhe o nome de *anomalia excentrica* do planeta, para differençar do angulo $ACM = \theta - \omega$, a que chamam *anomalia verdadeira*.

372. Podemos agora estabelecer uma relação entre a anomalia verdadeira e a anomalia excentrica. Com effeito, as equações

$$r = a\,(1 - e \cos u),\quad r = \frac{a\,(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)}$$

dão-nos:

$$e \cos u = 1 - \frac{1 - e^2}{1 + e\cos(\theta-\omega)} = \frac{e\cos(\theta-\omega) + e^2}{1 + e\cos(\theta-\omega)};$$

d'onde, facilmente resultam as relações seguintes:

$$1 - \cos u = \frac{(1-e)\,[1 - \cos(\theta - \omega]}{1 + e\cos(\theta-\omega)},$$

$$1 + \cos u = \frac{(1+e)\,[1 + \cos(\theta-\omega)]}{1 + e\cos(\theta-\omega)}.$$

Dividindo, membro a membro, a primeira d'estas equações pela segunda, vem:

$$\frac{1-\cos u}{1+\cos u} = \frac{1-e}{1+e}\cdot\frac{1-\cos(\theta-\omega)}{1+\cos(\theta-\omega)};$$

d'onde,

$$tg^2\frac{1}{2}u = \frac{1-e}{1+e}\cdot tg^2\frac{1}{2}(\theta-\omega);$$

d'onde, finalmente,

$$tg\frac{1}{2}(\theta-\omega) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{1}{2}u$$

é a equação procurada.

373. Si T é a duração da revolução completa de um planeta, a equação (37)

$$n\,t = u - e \operatorname{sen} u$$

dá-nos, para $u = 2\pi$, a relação seguinte :

$$n\ T = 2\ \pi\ ;$$

d'onde,

$$T = \frac{2\ \pi}{n}\ ;$$

mas, por ser

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}\ ,$$

teremos:

$$T = \frac{2\pi\ a\ \sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\ ,$$

equação d'onde facilmente deduz-se:

$$\mu = \frac{4\pi^2\ a^3}{T^2}$$

que é o valor invariavel da força acceleratriz R, á unidade de distancia, para todos os planetas do nosso mundo.

374. Para um planeta descrevendo uma outra ellipse, teriamos:

$$\mu = \frac{4\pi^2\ a'^3}{T'^2}\ ,$$

d'onde,

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3} = \frac{(2a)^3}{(2a')^3}\ ;$$

isto é, que *os quadrados dos tempos das revoluções dos planetas em torno do sol estão entre si como os cubos dos grandes eixos de suas orbitas.* E' a terceira lei do movimento planetario, devida a Kepler.

375. *Segunda questão.*—Muito preferivel, sob o ponto de vista algebrico, é a questão inversa da precedente. Os problemas que a constituem são, em geral, muito mais simples que na questão directa, pois não dependem do calculo

integral. Com effeito, si são dadas as equações finitas da trajectoria e da lei do movimento, facilmente as equações geraes

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dz^2}{dt^2}\right)^2},$$

nos permittirão conhecer a velocidade e a força. Quanto ás suas direcções, serão calculadas pelos angulos que respectivamente fazem com os tres eixos rectangulares considerados.

O caso que vamos estudar exemplificará a questão.

376. *Caso inverso das forças centraes.*—No estudo que fizemos das forças centraes, vimos que :

1º, si o movel é submettido á acção de uma força dirigida constantemente para um centro fixo e dada por uma funcção qualquer de sua distancia a este centro, as áreas descriptas por este raio vector serão sempre proporcionaes aos tempos, quaesquer que sejam a lei da força e a natureza da trajectoria ;

2º, que, si esta força central varia na razão inversa do quadrado do raio vector, a trajectoria será sempre uma secção conica em que um dos fócos será o centro fixo para onde convergem as forças ;

3º, finalmente, que, si esta trajectoria é uma ellipse, si o movel é o centro de gravidade d'um qualquer dos planetas do nosso mundo e si o dito fóco d'esta orbita elliptica é occupado pelo centro de gravidade do sol, os quadrados dos tempos das revoluções dos planetas têm entre si a mesma relação que os cubos dos grandes eixos de suas orbitas.

Agora, tratemos do problema inverso, isto é, si são dadas as tres leis de Kepler seguintes :

1ª, os planetas movem-se em curvas planas e seus raios vectores descrevem, em torno do sol, áreas proporcionaes aos tempos ;

2ª, as orbitas dos planetas são ellipses de que o sol occupa um dos fócos;

3ª, os quadrados dos tempos das revoluções dos planetas em torno do sol estão entre si como os cubos dos grandes eixos de suas orbitas:

qual será a lei da força?

377. Si a observação nos ensina que os raios vectores dos planetas descrevem, em torno do sol, áreas proporcionaes aos tempos, provemos que a força a que o planeta é submettido converge continuamente para a origem das áreas.

Para isto podemos seguir duas marchas: ou partimos da equação já estabelecida no caso directo das forças centraes,

$$u = \frac{1}{2} ct,$$

para chegar algebricamente á conclusão de que as componentes X e Y da força acceleratriz R, em cada ponto da trajectoria, são directamente proporcionaes ás respectivas coordenadas x e y, o que só poderá acontecer quando essa resultante R fôr dirigida para a origem das coordenadas, que é a origem das áreas; ou demonstramos geometricamente a proposição.

Preferindo a demonstração geometrica, seja AB (fig. 126) o elemento da trajectoria que um planeta qualquer descreve durante o tempo infinitamente pequeno dt. Chegado ao ponto B, por causa da velocidade adquirida n'esse ponto, o movel percorreria, no segundo instante dt, o espaço BC, igual á AB, sobre o prolongamento BN de AB; e sob a acção d'uma certa força continua, o movel percorreria, no tempo dt, um espaço BG; d'onde a composição d'este movimento com o movimento BC, devendo effectuar-se segundo a lei de Galileo, resultará o parallelogrammo $BCEG$; portanto, o planeta descreverá, no segundo instante dt, em logar do lado BC, a diagonal BE.

Isto posto, si S é o fóco em torno do qual o raio vector SB descreve áreas proporcionaes aos tempos, os triangulos SAB e SBE são equivalentes, pois que representam áreas descriptas em dois tempos iguaes; mas os triangulos SAB e SBC são equivalentes, pois que têm os seus vertices no mesmo ponto S e as suas bases sobre a mesma recta AN; d'onde, os triangulos SBC e SBE tambem serão equivalentes. E como estes dois triangulos têm a mesma base BS, será preciso que tambem tenham a mesma altura; d'onde, a recta CE, que une os vertices oppostos á base commum, será parallela a esta base BS. Então a recta BG, que é parallela á CE, por causa do parallelogrammo $BCEG$, terá a mesma direcção que a recta BS. Portanto, em cada ponto B da orbita de um planeta, a direcção BG da força acceleratriz será a mesma que a do raio vector BS, como queriamos demonstrar.

378. Seja (fig. 127) M a posição do planeta no fim do tempo t.

Chamando r e θ as coordenadas polares e (x, y) as coordenadas rectangulares do ponto M, teremos:

$$x = r\cos\theta, \; y = r\,sen\theta, \; r^2 = x^2 + y^2. \qquad (a)$$

Chamemos R a força que continuamente actúa sobre o planeta em seu movimento em torno do sol.

A grandeza d'esta força é incognita; mas, em virtude da consequencia que tiramos da primeira lei de Kepler, ella é uma força central, que actúa segundo o raio vector e de M para o fóco S, porque a orbita é concava para o sol.

As componentes da força R, segundo os eixos Sx e Sy, serão:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r}. \qquad (b)$$

Si v designa a velocidade no ponto M, tem-se:

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}, \qquad (c)$$

equação que, differenciada, dá-nos :

$$\frac{1}{2}\,dv^2 = \frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy\,;$$

mas as equações (b) respectivamente multiplicadas por dx e dy dão-nos :

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,dx = -\frac{R}{r}\,xdx,\quad \frac{d^2y}{dt^2}\,dy = -\frac{R}{r}\,ydy;$$

d'onde,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy = -\frac{R}{r}\,(\,xdx + ydy\,)\,;$$

portanto,

$$\frac{1}{2}\,dv^2 = -\frac{R}{r}\,(\,xdx + y\,)\,;$$

mas a terceira das equações (a) dá-nos :

$$rdr = xdx + ydy\,;$$

d'onde,

$$\frac{1}{2}\,dv^2 = -\,R\,dr. \qquad (d)$$

Differenciando as equações (a), vem :

$$\left.\begin{aligned} dx &= \cos\theta.\,dr - r\,\mathrm{sen}\,\theta.\,d\theta, \\ dy &= \mathrm{sen}\,\theta.\,dr + r\cos\theta.\,d\theta; \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

d'onde,

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2d\theta^2\,;$$

portanto, a equação (c) tomará a fórma seguinte :

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2d\theta^2}{dt^2}. \qquad (f)$$

Para eliminarmos dt^2 d'esta equação, lancemos mão das equações (b).

Multiplicando a primeira por y e a segunda por x, vem :

$$y \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{R}{r} xy, x \frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{R}{r} xy ;$$

d'onde,

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = o , \text{ ou } \frac{d (xdy - ydx)}{dt^2} dt^2 = 0 ,$$

ou ainda,

$$d \left(\frac{xdy - ydx}{dt} \right) = 0,$$

ou, finalmente,

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = c ;$$

d'onde,

$$xdy - ydx = cdt. \qquad (g)$$

Substituindo n'esta equação os valores de x e y, dados pelas equações *(a)*, bem como os de dx e dy, dados pelas equações *(e)*, teremos :

$$r^2d\theta = cdt ;$$

d'onde,

$$dt^2 = \frac{r^4d\theta^2}{c^2}.$$

Si, pois, substituirmos este valor na equação *(f)*, vem :

$$v^2 = c^2 \frac{dr^2 + r^2d\theta^2}{r^4 \, d\theta^2} = c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\left(d \frac{1}{r} \right)^2}{d\theta^2} \right], \qquad (h)$$

Tomemos agora a equação da trajectoria do movel. Em virtude da segunda lei de Kepler, esta curva sendo uma ellipse, teremos :

$$r = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \qquad (k)$$

que é a sua equação referida a um fóco e a um eixo polar que passa por este fóco e pelo perihelio P. D'esta equação deduz-se :

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{a(1 - e^2)}, \quad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = \frac{-e \operatorname{sen} \theta}{a(1 - e^2)};$$

d'onde, pela substituição dos quadrados d'estes valores, a equação (h) tomará a fórma seguinte :

$$v^2 = c^2 \left[\frac{1 + 2e \cos \theta + e^2}{a^2(1 - e^2)^2} \right] = c^2 \left[\frac{2 - 1 + 2e \cos \theta + e^2}{a^2(1 - e^2)} \right] =$$

$$= c^2 \left[\frac{2(1 + e \cos \theta) - (1 - e^2)}{a^2(1 - e^2)} \right].$$

Da equação (k) deduz-se :

$$1 + e \cos \theta = \frac{a(1 - e^2)}{r};$$

portanto, teremos :

$$v^2 = c^2 \left[\frac{\frac{2a(1 - e^2)}{r} - (1 - e^2)}{a^2(1 - e^2)^2} \right] = c^2 . \frac{\frac{2a}{r} - 1}{a^2(1 - e^2)};$$

d'onde,

$$v^2 = \frac{c^2}{a^2(1 - e^2)} \left(\frac{2a}{r} - 1 \right).$$

Differenciando, vem:

$$\frac{1}{2} d v^2 = - \frac{c^2}{a(1 - e^2)} . \frac{dr}{r^2};$$

d'onde, por causa da equação (d),

$$\frac{1}{2} d v^2 = - R \, dr,$$

teremos :

$$R = \frac{c^2}{a(1 - e^2)} . \frac{1}{r^2};$$

d'onde, fazendo, para abreviar,

$$\mu = \frac{c^2}{a\,(1 - e^2)}, \qquad (l)$$

resultará:

$$R = \frac{\mu}{r^2};$$

isto é, que *a força R actúa sobre cada planeta na razão inversa do quadrado de sua distancia ao sol*. Tal é a lei da força, deduzida por Isaac Newton.

379. Para $r = 1$, a fórmula precedente dá-nos $R = \mu$; isto é, μ é o valor da força acceleratriz á unidade de distancia.

Para tirarmos uma ultima consequencia das tres leis de Kepler, tomemos a equação *(g)*,

$$r^2\,d\,\theta = cdt;$$

d'onde, por ser tambem,

$$r^2\,d\,\theta = 2\left(r\,d\,\theta.\frac{1}{2}\,r\right) = 2\,du,$$

representando-se por *du* a área elementar do sector elliptico *MSM'*, teremos :

$$2\,du = cdt;$$

d'onde, integrando e suppondo nulla a constante, porque o tempo começa com as áreas, virá :

$$u = \frac{1}{2}\,ct.$$

Si, pois, *T* é o tempo da revolução completa d'um planeta, esta equação dá-nos :

$$\pi\,ab = \frac{1}{2}\,c\,T,$$

sendo a e b os semi-eixos maior e menor da ellipse; d'onde, por ser n'esta curva

$$b = a\sqrt{1 - e^2},$$

teremos:

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2} c T;$$

d'onde,

$$\frac{c^2}{a(1 - e^2)} = \frac{4 \pi^2 a^3}{T^2}.$$

Combinando esta equação com a equação (1),

$$\mu = \frac{c^2}{a(1 - e^2)},$$

resultará

$$\mu = \frac{4 \pi^2 a^3}{T^2}.$$

Para um outro planeta teriamos:

$$\mu' = \frac{4 \pi^2 a'^3}{T'^2};$$

mas, em virtude da terceira lei de Kepler, resumida pela equação

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3},$$

teremos:

$$\mu = \mu';$$

isto é, á unidade de distancia do sol, ou a uma mesma distancia d'este astro, a força acceleratriz R é constante para todos os planetas do nosso mundo.

2. MOVIMENTO D'UM PONTO SOBRE UMA CURVA DADA

380. Depois de havermos estabelecido a theoria do movimento d'um ponto livre, nos será facil estendel-a ao caso

em que o ponto material é sujeito a mover-se sobre uma curva dada e supposta fixa.

Seja (fig. 128) AMB a curva dada e definida pelas equações

$$\left.\begin{array}{l} F\ (x, y, z) = o, \\ F_1\ (x, y, z) = o. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Consideremos um ponto M sujeito a mover-se sobre esta curva, continuamente solicitado por uma força R. A pressão exercida pelo ponto M dá logar a que a curva exerça necessariamente uma acção igual e contraria a esta pressão : é a *resistencia da curva*. Si, pois, considerarmos, além da força dada R, uma força N, de intensidade incognita, que represente a resistencia da curva, é claro que podemos abstrahir d'esta curva e considerar o movel como si fosse um ponto livre.

Esta resistencia póde ser decomposta em duas forças : uma dirigida segundo a tangente á curva, em sentido contrario do movimento, que chama-se *o attrito*; outra perpendicular á mesma tangente. Si abstrahirmos do attrito, a acção N da curva sobre o movel será dirigida segundo uma normal á curva dada. N'esta hypothese, designemos por (λ, μ, ν) os angulos que a direcção da normal N faz com tres eixos rectangulares fixos Ox, Oy, Oz e sejam, em cada instante, (X, Y, Z) as componentes rectangulares da força R segundo estes eixos coordenados. Isto posto, si (x, y, z) são as coordenadas do movel no fim do tempo t, as equações do seu movimento serão:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

As cinco equações (1) e (2) não sendo sufficientes para o calculo das sete incognitas (x, y, z, N, λ, μ, ν), procuremos

traduzir algebricamente as duas relações necessarias á que os angulos (λ, μ, ν) devem satisfazer. A primeira d'estas equações

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1 \qquad (3)$$

significa que a somma dos quadrados dos cosenos dos angulos que a direcção da força N faz com os tres eixos coordenados é igual á unidade.

Quanto á segunda seja θ o angulo que duas rectas fazem entre si no espaço e sejam (α, β, γ) e (λ, μ, ν) os angulos que cada uma d'estas rectas faz, respectivamente, com os tres eixos coordenados. O angulo θ, em virtude d'uma relação achada por Euler, será dada pela equação seguinte:

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu.$$

Supponhamos agora que θ seja o angulo que a direcção da normal N faz com a tangente á trajectoria do movel e que (α, β, γ) sejam os angulos que o elemento rectilineo d'esta curva no ponto M, ou a direcção da tangente, faz, respectivamente, com os mesmos eixos coordenados. Teremos:

$$\cos \theta = \cos 90^o = 0, \ \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \ \cos \beta = \frac{dy}{ds} \ \cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Substituindo estes valores na equação precedente, resultará a equação seguinte:

$$\frac{dx}{ds} \cos \lambda + \frac{dy}{ds} \cos \mu + \frac{dz}{ds} \cos \nu = o, \qquad (4)$$

que significa o perpendicularismo da recta N com a tangente ao ponto M da trajectoria: é a segunda equação procurada.

Tal é o systema das sete equações que encerram a solução geral do problema. Ellas nos permittiriam calcular, em cada instante, a força incognita N, os tres angulos que determinam a sua direcção no espaço e as tres coordenadas do movel, si não fossem as difficuldades algebricas.

381. Para acharmos as expressões das tres coordenadas do movel em funcção do tempo, podemos empregar o methodo seguinte :

Multipliquemos respectivamente por

$$2\,\frac{dx}{ds},\ 2\,\frac{dy}{ds},\ 2\,\frac{dz}{ds}$$

as tres equações (2) e sommemos as equações assim obtidas. Teremos :

$$\frac{2\,dx\,d^2x + 2\,dy\,d^2y + 2\,dz\,d^2z}{dt^2} = 2\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

por causa da equação (4). O primeiro membro d'esta equação contendo no numerador a differencial de

$$dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

podemos escrevel-a assim :

$$\frac{d\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = 2\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\ ;$$

d'onde, por ser

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

resultará :

$$\frac{d.\,ds^2}{dt^2} = 2\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

ou, designando por v a velocidade adquirida em um ponto qualquer da trajectoria, a equação seguinte :

$$d.\,v^2 = 2\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Si o trinomio differencial do segundo membro d'esta equação é uma differencial exacta, isto é, si tivermos

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\,\varphi\,(x,\,y,\,z),$$

a equação precedente tomará a fórma seguinte:

$$d\,v^2 = 2\,d\,\varphi\,(x,\,y,\,z)\,;$$

d'onde, integrando, vem :

$$v^2 = 2\,\varphi\,(x,\,y,\,z) + C,$$

sendo C uma constante arbitraria. Para determinal-a, supponhamos que K seja a velocidade inicial correspondente ao ponto cujas coordenadas são (x_1, y_1, z_1). Teremos :

$$K^2 = 2\,\varphi\,(x_1,\,y_1,\,z_1) + C\,;$$

portanto,

$$v^2 = K^2 + 2\,\varphi\,(x,\,y,\,z) - 2\,\varphi\,(x_1,\,y_1,\,z_1). \tag{5}$$

Por ser

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ e } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

tambem teremos :

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dz^2}{dt^2}\left[1 + \frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2}\right].$$

Resolvendo as equações (1), que definem a curva dada, supponhamos que os valores de x e y sejam dados pelas equações :

$$x = f\,(z), \quad y = f_1\,(z)\,; \tag{6}$$

d'onde, a ultima equação tomará a fórma seguinte :

$$v^2 = \frac{dz^2}{dt^2}\left[1 + \left(f'\,(z)\right)^2 + \left(f'_1\,(z)\right)^2\right]. \tag{7}$$

Comparando as equações (5) e (7), teremos:

$$\frac{dz^2}{dt^2}\left[1 + \left(f'\,(z)\right)^2 + \left(f'_1\,(z)\right)^2\right] =$$
$$= K^2 + 2\,\varphi\,(x,\,y,\,z) - 2\,\varphi\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$$

ou, por causa das equações (6),

$$\frac{dz^2}{dt^2}\left[1+\left(f'(z)\right)^2+\left(f'_1(z)\right)^2\right]=$$

$$=K^2+2\,\varphi\left[f(z),\,f_1(z),\,z\right]-2\,\varphi\left[f(z_1),\,f_1(z_1),\,z_1\right];$$

d'onde,

$$dt=\frac{\pm\,dz\sqrt{1+(f'(z))^2+(f'_1(z))^2}}{\sqrt{K^2+2\,\varphi\,[f(z).\,f_1(z),z]-2\,\varphi\,[f(z_1),\,f_1(z_1),\,z_1]}}.$$

Tal é a equação que, si puder ser integrada, nos permittirá conhecer o valor de z em funcção da variavel t. A constante d'esta integração será determinada pelo valor de z, que corresponde a $t = o$. Seja, pois,

$$z=\psi(t)$$

o valor achado para a variavel z. Substituindo-o nas equações (6), teremos:

$$x=f\left(\psi(t)\right),\; y=f_1\left(\psi(t)\right),$$

equações que determinam as coordenadas x e y em funcção do tempo.

382. Conhecidas as equações finitas do movimento,

$$z=\psi(t),\; x=f\left(\psi(t)\right),\; y=f_1\left(\psi(t)\right),$$

simples differenciações de segunda ordem nos darão os valores de

$$\frac{d^2x}{dt^2},\;\frac{d^2y}{dt^2},\;\frac{d^2z}{dt^2};$$

d'onde, as equações (2) nos permittirão facilmente o calculo

da força N e dos angulos que determinam a direcção d'esta força. Com effeito, das equações (2) deduz-se :

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)^2 = N^2 \cos^2 \lambda ,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)^2 = N^2 \cos^2 \mu ,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)^2 = N^2 \cos^2 \nu ;$$

d'onde,

$$N^2 \left(\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu \right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)^2$$

ou, por causa da equação (3),

$$N^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)^2 ;$$

d'onde, a intensidade da força normal será calculada pela expressão seguinte :

$$N = \pm \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)^2}$$

Quanto á direcção d'esta força N no espaço, as equações (2) dão-nos :

$$\cos \lambda = \frac{1}{N}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right) , \quad \cos \mu = \frac{1}{N}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right) ,$$

$$\cos \nu = \frac{1}{N}\left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right) .$$

Taes são as fórmulas que terminam a solução do problema.

383. A *resistencia total* N que uma curva fixa oppõe ao movimento de um ponto forçado a descrevel-a, sem

attrito, é, em cada instante, a resultante de duas outras resistencias: uma *estatica* e outra *dynamica*. *A resistencia estatica* é a reacção opposta pela curva ao ponto material, mesmo no estado de seu equilibrio, em que se achasse em repouso sobre a curva.

Esta resistencia, originando-se da pressão exercida sobre a curva pela resultante R das forças acceleratrizes que animam o ponto material e sendo, conforme a lei de Carnot, dirigida segundo uma normal á curva dada no ponto considerado, será determinada pela expressão

$$R \cos (R, Q)$$

da projecção da resultante R sobre a normal Q.

O estado de movimento do ponto material faz nascer a *resistencia dynamica*. Ella é produzida pela tendencia perpetua do movel a fugir da curva que elle é forçado a descrever. A esta resistencia os geometras deram o nome de *força centrifuga*, porque chamaram de *centripetas* as forças centraes, ou tendencias para centros fixos.

Um exemplo de movimento em que fica perfeitamente clara ao nosso espirito a manifestação d'estas duas especies de forças, temos no movimento de uma *funda*. Com effeito, n'esta machina, destinada a arremessar pedras, a mão do atirador exerce sobre a corda um esforço continuo, puxando o projectil para o centro da trajectoria circular que elle é forçado a descrever: é a *força centripeta*. Reciprocamente, o projectil exerce uma pressão continua sobre o laço que termina a *funda*: é a *força centrifuga*. Estas duas forças iguaes e contrarias, applicadas aos extremos da corda, determinam a sua *tensão* durante o movimento da funda. No momento em que o atirador lança o projectil no espaço, cessa a força centripeta e, portanto, o projectil proseguirá sobre a tangente ao circulo no ponto da fuga, conforme a primeira lei fundamental da mecanica.

384. Para medirmos a intensidade da força centrifuga, seguiremos a marcha historica. Estudaremos primeiramente

o caso do movimento circular uniforme, devido a Christiano Huyghens; depois generalisaremos a lei para o caso de uma curva qualquer, conforme fez Isaac Newton.

Consideremos um ponto material M (fig. 129) ligado a um ponto fixo C por um fio inextensivel $C\ M$. Imaginemos que o movel soffra unicamente uma impulsão dirigida perpendicularmente ao comprimento do fio e seja v a velocidade impressa.

Resulta que o movel descreverá uma circumferencia de circulo, cujo centro será o ponto fixo e cujo raio será o comprimento do fio.

A tensão que o fio experimenta durante o movimento é exactamente a medida da força centrifuga; portanto, suppondo applicada ao movel uma força igual á tensão do fio e constantemente dirigida para o centro do circulo, poderemos abstrahir do fio e suppôr que o movel seja inteiramente livre.

Assim, este movimento terá logar em virtude da velocidade inicial v e da acção continua da força centripeta considerada.

Isto posto, seja M a posição do movel em um instante qualquer.

Si de repente elle se tornasse livre, seguiria sobre a tangente ao ponto M com um movimento uniforme e no tempo dt percorreria o espaço $MA = vdt$. Chamemos φ a força central, cuja grandeza queremos achar.

Si esta força actuasse sómente no movel, elle percorreria durante o mesmo tempo dt o espaço MB.

Assim, em virtude da lei de Galileo, o movel deverá descrever a diagonal MR do parallelogrammo $MBRA$ e o ponto R se achará sobre a circumferencia.

Por uma propriedade muito conhecida do circulo, sabemos que a perpendicular elevada pelo ponto B d'um diametro é média proporcional entre os dois segmentos que ella determina sobre o mesmo diametro; isto é,

$$\overline{BR}^2 = \overline{MB}.\ \overline{BD};$$

d'onde, por ser

$$\overline{BR} = \overline{MA},$$

teremos :

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}.\ \overline{BD};$$

mas, tambem

$$MA = vdt;$$

portanto,

$$v^2\ dt^2 = \overline{MB}.\ \overline{BD} = \overline{MB}.\ \overline{MD},$$

tomando o diametro MD pelo segmento BD. Designando r o raio do circulo, teremos :

$$v^2\ dt^2 = \overline{MB}.\ 2\ r.$$

A força acceleratriz φ, constante durante o tempo dt, dá-nos :

$$\overline{MB} = \frac{1}{2}\ \varphi\ dt^2;$$

d'onde,

$$v^2\ dt^2 = \frac{1}{2}\ \varphi\ dt^2\ 2\ r$$

ou

$$v^2 = \varphi.\ r;$$

d'onde, finalmente,

$$\varphi = \frac{v^2}{r}. \qquad (8)$$

Tal é a expressão que nos dá o valor da intensidade da força centrifuga, no caso do movimento circular e uniforme d'um ponto material, cuja massa é igual á unidade.

Designando por F a força motriz do movimento e por m a massa do movel, teremos :

$$F = m\ \varphi = m\ \frac{v^2}{r}. \qquad (9)$$

385. Esta fórmula de Huyghens foi generalisada por Newton, para o caso d'uma curva qualquer.

Para conhecermos a fórmula geral, consideremos que, qualquer que seja a trajectoria curvilinea a que um movel seja sujeito, ella terá dois elementos communs com o seu circulo osculador; portanto, a determinação da força centrifuga no movimento d'um ponto sobre uma curva dada se reduzirá á da força centrifuga, que se manifesta no circulo osculador da mesma curva, por isso que, em cada instante, podemos suppôr que o movel percorre este circulo em logar de percorrer a curva dada.

Si, pois, ρ designa o raio de curvatura, m a massa do movel, v a velocidade adquirida, φ a força acceleratriz e F a força motriz, teremos:

$$F = m\varphi = m\frac{v^2}{\rho}; \qquad (10)$$

sendo

$$v = \frac{ds}{dt}$$

e

$$\rho = \pm \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}} \qquad (*)$$

386. Consideremos um ponto material M (fig. 130) movendo-se circularmente em torno de um ponto fixo C. Si h é a altura a que é devida a sua velocidade inicial v, e g a intensidade da gravidade, teremos:

$$v^2 = 2gh;$$

d'onde, r designando a extensão do fio que liga o movel ao centro de sua trajectoria, F a força centrifuga e m a massa do movel, a equação (9) dá-nos:

$$F = \frac{2mgh}{r};$$

d'onde,

$$\frac{F}{mg} = \frac{2h}{r};$$

(*) Vide a importante obra de Cournot.— Traité élémentaire de la Théorie des Fonctions. Tomo primeiro.— Paris.—1857.—pagina 378.

isto é, que *a força centrifuga está para o peso, assim como o dobro da altura devida á velocidade está para o raio do circulo descripto pelo movel.*

Suppondo que o movel seja de dimensões diminutas em relação ao raio r, a força centrifuga poderá ser considerada como constante em toda a extensão de sua massa ; d'onde, a relação precedente poderá ser tomada como invariavel para todos os pontos do movel.

387. Si o movimento da *funda* não tem logar em um plano horizontal, a velocidade do movel, a força centrifuga e a tensão do fio serão necessariamente variaveis. Assim, supponhamos que o movimento do grave se effectue em um plano vertical.

Designemos por $2\,gh$ o quadrado de sua velocidade, quando o movel acha-se no plano horizontal HH' que passa pelo centro C.

No fim de um tempo qualquer t, seja z a distancia do movel M a este plano.

Teremos:

$$v^2 = 2g\,(h + z)\,;$$

portanto,

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{2\,mg\,(h + z)}{r} \qquad (11)$$

será a expressão da força centrifuga do movel.

A *tensão total* experimentada pelo fio será medida pela *pressão* que o movel exerce em cada instante sobre o ponto fixo C. Ora, esta pressão, sendo exactamente igual á *resistencia total* que a trajectoria oppõe ao movel em cada instante e, conforme vimos precedentemente (383), esta resistencia devendo constar de duas partes: de uma *resistencia estatica,* devida ao peso do corpo, e de uma *resistencia dynamica,* devida á sua velocidade, será calculada da maneira seguinte :

Seja o peso mg do corpo representado pela recta MP. Projectando esta força sobre o prolongamento da normal

CM, a projecção MQ representará a componente do peso que dá a medida da resistencia estatica ; d'onde, teremos:

$$MQ = mg \cos PMQ = mg \cos MCD = mg \frac{CD}{CM} = mg \frac{z}{r}.$$

A resistencia dynamica sendo medida pela força centrifuga expressa pela equação (11),

$$F = \frac{2\,mg\,(h + z)}{r},$$

a tensão θ do fio será :

$$\theta = \frac{mgz}{r} + \frac{2\,mg\,(h + z)}{r} = \frac{mg\,(2h + 3z)}{r}.$$

No ponto B, o mais baixo da trajectoria circular, a tensão θ será *maxima*. N'este caso, por ser $z = r$, teremos:

$$\theta = \frac{mg\,(2h + 3r)}{r}.$$

Quando o movel chegar ao ponto A, o mais elevado de sua trajectoria, a tensão θ será *minima*. N'este caso, $z = -r$ e

$$\theta = \frac{mg\,(2h - 3r)}{r}.$$

O simples exame d'esta fórmula nos mostra que, si tivermos

$$2h < 3r \text{ ou } h < \frac{3r}{2},$$

a tensão θ será negativa; isto é, que ella será mudada em uma contracção durante uma parte do movimento. Resulta, pois, que o fio deve ser *inflexivel* para que o movimento circular possa effectuar-se.

Tal é a theoria do movimento das *fundas*, abstracção feita do peso do fio e de sua força centrifuga, isto é, na hypothese de ser a massa do fio desprezivel em relação á do movel.

388. Antes de Euler instituir a decomposição das forças segundo tres eixos coordenados, os geometras, desde Newton, usavam d'outro modo geral de decomposição.

Seja M (fig. 131) um ponto livre e solicitado por forças continuas quaesquer, cuja resultante chamaremos mR.

Si (X, Y, Z) designam as componentes da força mR segundo tres eixos rectangulares fixos, m a massa do movel e (x, y, z) as suas coordenadas no fim do tempo t, temos as equações seguintes:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y = m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z = m\frac{d^2z}{dt^2};$$

mas, si (α, β, γ) são os angulos que a tangente MT faz respectivamente com os eixos dos x, dos y e dos z, e si v designa a velocidade do movel, teremos:

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha,\ \frac{dy}{dt} = v\cos\beta,\ \frac{dz}{dt} = v\cos\gamma;$$

d'onde,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + v\frac{d\cos\alpha}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\beta + v\frac{d\cos\beta}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\gamma + v\frac{d\cos\gamma}{dt}.$$

Designando ρ o raio do circulo osculador e (λ, μ, ν) os angulos que esta recta MF faz com os eixos dos x, dos y e dos z, teremos:

$$\cos\lambda = \rho\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = \rho\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\cos \mu = \rho \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} = \rho \frac{d \cos \beta}{ds},$$

$$\cos \nu = \rho \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} = \rho \frac{d \cos \gamma}{ds};$$

portanto,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \cos \lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \beta + \frac{v^2}{\rho} \cos \mu,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \gamma + \frac{v^2}{\rho} \cos \nu;$$

finalmente, teremos:

$$X = m \frac{dv}{dt} \cos \alpha + \frac{mv^2}{\rho} \cos \lambda,$$

$$Y = m \frac{dv}{dt} \cos \beta + \frac{mv^2}{\rho} \cos \mu,$$

$$Z = m \frac{dv}{dt} \cos \gamma + \frac{mv^2}{\rho} \cos \nu.$$

Examinando estas equações vemos que a projecção da força motriz mR, segundo cada uma das direcções dos tres eixos coordenados, é igual á somma algebrica das projecções sobre os mesmos eixos:

1º, d'uma força $m \frac{dv}{dt}$, dirigida segundo a tangente á trajectoria do movel;

2º, d'uma força $\frac{mv^2}{\rho}$, dirigida segundo a normal que passa pelo centro do circulo osculador a esta mesma trajectoria; portanto, a força $m R$ será a resultante d'estas duas ultimas forças.

Resulta, pois, que, no movimento curvilineo d'um ponto material, a força motriz poderá ser, em cada instante, decomposta em duas outras: uma dirigida segundo a tangente, que é *a força tangencial*; outra dirigida segundo o raio do circulo osculador, que chama-se *a força centripeta* ou *força normal*.

Designando-as por T e F, teremos:

$$T = m \frac{dv}{dt}, \quad F = \frac{mv^2}{\rho}. \qquad (12)$$

389. Em logar de fazermos a composição prévia das forças que solicitam o ponto material, para em seguida decompôr a resultante $m\,R$ d'estas forças em suas componentes tangencial e centripeta, poderemos fazer a decomposição de cada uma das forças dadas segundo a tangente e a respectiva normal existente no plano que passa pela força e pela tangente.

As componentes tangenciaes serão facilmente compostas em uma unica resultante T, igual á somma algebrica das mesmas componentes. As componentes perpendiculares á tangente, ou situadas no plano normal á trajectoria no ponto considerado, nos darão tambem uma unica resultante F, necessariamente dirigida segundo a *normal principal*, que é a direcção do raio do circulo osculador.

Si qualquer das forças que solicitam o ponto movel é normal á trajectoria, é claro que será nulla a sua componente tangencial. Analogamente, não poderá ser contemplada entre as forças normaes a força dada que achar-se situada na direcção da tangente á trajectoria do movel.

390. Si concebermos o movimento d'um ponto livre, sob a acção de forças quaesquer, como sendo o movimento d'um ponto obrigado a mover-se sobre a trajectoria que elle descreve livremente no espaço, é claro que ficará o estudo do movimento livre subordinado ao estudo do movimento forçado.

Assim, si a força motriz total é decomposta, em cada instante, segundo a tangente á trajectoria e segundo o raio

do circulo osculador d'esta curva, deverá haver equilibrio entre a *resistencia estatica* e a *resistencia dynamica* (383).

Com effeito, devendo ser nulla a *resistencia total* offerecida pela trajectoria, cuja fixidez é puramente ficticia, e esta resistencia sendo a resultante de duas forças : d'uma resistencia estatica, devida á pressão exercida pela força motriz total, e d'uma resistencia dynamica, devida á velocidade do movel, é claro que estas duas componentes da resistencia total deverão ser iguaes e de direcções oppostas ; isto é, que :

$$m\ R\ cos\ (\ R,\ Q\ ) = \frac{mv^2}{\rho},$$

d'onde,

$$R\ cos\ (\ R,\ Q\ ) = \frac{v^2}{\rho}.$$

Si n'esta equação substituirmos os valores de v e ρ, dados pelas equações

$$v = \frac{ds}{dt},\ \rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$

e si attendermos aos valores de R e $cos\ (\ R,\ Q\ )$, dados pelas fórmulas

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$cos\ (R,\ Q) = cos\ (\ Q,\ x\ )\ cos\ (R,\ x\ ) + cos\ (Q,\ y\ )\ cos\ (\ R,\ y\ ) +$$
$$+ cos\ (\ Q,\ z\ )\ cos\ (\ R,\ z\ )\ ;$$

sendo

$$cos\ (\ Q,\ x\ ) = \rho\ \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\ cos\ (\ Q,\ y\ ) =$$

$$= \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\ cos\ (\ Q,\ z\ ) = \rho\ \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds},$$

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}, \cos(R, y) = \frac{Y}{R}, \cos(R, z) = \frac{Z}{R};$$

chegaremos á equação final seguinte :

$$\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) d^2x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) d^2y + \\ + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) d^2z = 0;$$

d'onde resultam as tres equações

$$X = \frac{d^2x}{dt^2}, Y = \frac{d^2y}{dt^2}, Z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

que são as equações differenciaes e fundamentaes do movimento d'um ponto livre.

« Ainda que esta maneira de obtel-as seja muito menos directa e exija um maior apparelho algebrico, tenho, entretanto, julgado necessario indical-a distinctamente, porque me parece propria a esclarecer, sob um ponto de vista importante, a theoria ordinaria do movimento curvilineo, tornando sensivel a existencia da força centrifuga, mesmo no caso d'um ponto livre, noção sobre a qual o methodo commummente adoptado hoje deixa em geral muita incerteza e obscuridade. » (A. Comte.)

391. Preferindo a subordinação do movimento forçado ao movimento livre, podemos tambem obter as equações differenciaes do movimento livre, instituindo a decomposição geral das forças segundo a tangente e a normal á trajectoria.

Com effeito, considerando durante um tempo infinitesimal dt o movimento do ponto como sendo rectilineo e na direcção da tangente á trajectoria, é claro que o movimento do movel será exclusivamente devido á acção da componente tangencial.

Ora, esta componente sendo em cada instante igual ao producto da força continua total pelo coseno do angulo que

a sua direcção faz com a da tangente, teremos a equação fundamental seguinte:

$$m \frac{dv}{dt} = m\ R \cos(R,\ T)$$

ou, por ser

$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = R \cos(R,\ T).$$

Substituindo n'esta equação os valores de d^2s, R e $\cos(R,\ T)$, dados pelas expressões

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},\quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos(R,\ T) = \cos(T,\ x)\cos(R,\ x) + \cos(T,\ y)\cos(R,\ y) +$$

$$+ \cos(T,\ z)\cos(R,\ z);$$

sendo

$$\cos(T,\ x) = \frac{dx}{ds},\quad \cos(T,\ y) = \frac{dy}{ds},\quad \cos(T,\ z) = \frac{dz}{ds},$$

$$\cos(R,\ x) = \frac{X}{R},\quad \cos(R,\ y) = \frac{Y}{R},\quad \cos(R,\ z) = \frac{Z}{R};$$

obteremos a equação differencial seguinte:

$$\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) dx + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) dy + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) dz = 0;$$

d'onde,

$$X - \frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad Y - \frac{d^2y}{dt^2} = 0,\quad Z - \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Taes são as equações que queriamos achar.

3. MOVIMENTO D'UM PONTO SOBRE UMA SUPERFICIE DADA

392. O problema do movimento d'um ponto sobre uma curva dada é exactamente o problema do movimento d'um ponto sobre duas superficies, pois, geometricamente considerando, uma curva é, no caso o mais geral, definida pela intersecção de duas superficies dadas.

Resulta d'esta observação que o problema do movimento d'um ponto sobre uma superficie dada depende dos dois problemas precedentemente tratados: do movimento d'um ponto livre e do movimento d'um ponto sobre uma curva dada.

Estes dois casos extremos devem subordinar o caso que vamos estudar.

Supponhamos um ponto material sob a acção de forças quaesquer e obrigado a mover-se, sem attrito, sobre uma superficie dada, supposta fixa.

E' claro que o problema consistirá nas seguintes questões: determinação da trajectoria, determinação do movimento do ponto sobre esta curva e determinação da resistencia opposta pela superficie á pressão sobre ella exercida pelas forças continuas que animam o movel.

Ora, muito complicado será o problema, pois que reune as difficuldades do trajecto livre ás do movimento sobre uma curva dada.

Effectivamente, pois que a determinação da trajectoria do movel bem como a determinação do movimento sobre esta trajectoria são objectos da theoria do movimento livre, sendo a determinação da resistencia da superficie uma questão da theoria do movimento sobre uma curva dada.

Portanto, o caso do movimento d'um ponto sobre uma superficie dada será de todos o mais difficil.

393. Seja um ponto material forçado a mover-se sobre uma superficie definida pela equação

$$f(x, y, z) = o, \qquad (1)$$

Designando por N a resistencia que, em cada instante, a superficie oppõe ao movel, é claro que poderemos suppôl-o como inteiramente livre si reunirmos as componentes da força N ás forças que o animam continuamente. Sejam, pois, (λ, μ, ν) os angulos que a resistencia N (necessariamente dirigida segundo uma normal á superficie si fizermos abstracção do attrito) faz respectivamente com tres eixos rectangulares fixos Ox, Oy, Oz. Sejam, finalmente, (X, Y, Z) as componentes rectangulares da resultante R das forças que solicitam o movel, em cada instante, segundo estes eixos coordenados, e (x, y, z) as coordenadas do movel no fim do tempo t. Isto posto, as equações geraes do movimento serão:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N \cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N \cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = $$

$$= Z + N \cos\nu. \qquad (2)$$

Por ser a força N normal á superficie representada pela equação (1), os angulos (λ, μ, ν) serão dados pelas equações seguintes:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\lambda &= \pm \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}} = \varphi \cdot \frac{df}{dx}, \\
\cos\mu &= \pm \frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}} = \varphi \cdot \frac{df}{dy}, \\
\cos\nu &= \pm \frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}} = \varphi \cdot \frac{df}{dz};
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

sendo, por abreviação,

$$\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

Substituindo os valores dados pelas expressões (3) nas equações (2), teremos :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\varphi\frac{df}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\varphi\frac{df}{dy}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\varphi\frac{df}{dz}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Taes são as equações que, reunidas á equação (1), constituirão um systema de quatro equações sufficientes para a determinação da resistencia N e das coordenadas (x, y, z) em funcção do tempo t.

394. Seja $A\ M\ B$ (fig. 132) a curva descripta, sem attrito, pelo movel sobre a superficie dada. Chamemos R a resultante das forças continuas que o animam e designemos por N a resistencia normal á superficie, igual e opposta á pressão que este ponto material exerce sobre a mesma superficie.

Decomponhamos a resultante R em duas forças : a primeira, $M\,T$, segundo a tangente á trajectoria ; a segunda, $M\ Q$, segundo uma perpendicular á mesma tangente da curva considerada.

Compondo as duas forças normaes Q e N, seja F a sua resultante, necessariamente dirigida segundo o raio $M\ K$ do circulo osculador da trajectoria no ponto M. Si m designa a massa do movel, v a sua velocidade no fim do tempo t e ρ o raio do circulo osculador, as equações geraes do movimento serão :

$$m\frac{dv}{dt} = T, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F.$$

O triangulo $F\ M\ Q$ dá-nos :

$$\frac{F}{Q} = \frac{sen\ M\ Q\ F}{sen\ M\ F\ Q} = \frac{sen\ (180 - Q\ M\ N)}{sen\ (180 - F\ M\ N)} = \frac{sen\ Q\ M\ N}{sen\ F\ M\ N};$$

d'onde,

$$sen\ F\ M\ N = Q\,.\,\frac{sen\ Q\ M\ N}{F},$$

equação que nos permitte determinar a posição da força F, ou do plano osculador $R\ M\ F$, quando conhecemos v, ρ, Q e o angulo $Q\ M\ N$.

Si quizessemos determinar a pressão total exercida pelo movel sobre a superficie, em cada instante, procurariamos a resultante da força Q e da força centrifuga F', igual e opposta á força centripeta F, cuja resultante seria a força N', igual e opposta á força N.

395. Si a força motriz R fosse dirigida segundo a normal MQ, teriamos:

$$T = o, \text{ ou } m\frac{dv}{dt} = o;$$

d'onde,

$$v = const;$$

isto é, o movimento seria uniforme. N'este caso, a unica equação do movimento seria

$$F = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Si a força motriz R fosse dirigida segundo a tangente MT á trajectoria, a equação do movimento seria

$$R = \frac{mdv}{dt}.$$

N'este caso, por ser

$$Q = o,$$

a resistencia N coincidirá com a força centripeta F e, portanto, se achará situada no plano osculador RMF a normal N á superficie; d'onde, *o plano osculador da trajectoria do movel será constantemente normal á superficie considerada.* E como esta propriedade pertence *á linha mais curta* entre dois pontos tomados sobre a superficie dada, será esta linha a trajectoria do movel.

As linhas mais curtas sobre uma superficie dada são chamadas *as linhas geodesicas* d'esta superficie.

396. Existe um methodo commum aos tres casos do movimento d'um ponto, para a determinação da velocidade do movel, methodo muito notavel pela sua grande applicação, sobretudo na *Mecanica celeste*.

Para o mostrarmos, lancemos mão das equações geraes do movimento d'um ponto sobre uma superficie dada, já estabelecidas:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N \cos \lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N \cos \mu,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N \cos \nu.$$

Multiplicando a primeira d'estas equações por $2\, dx$, a segunda por $2\, dy$ e a terceira por $2\, dz$ e sommando as equações resultantes, teremos:

$$2\,(X\, dx + Y\, dy + Z dz) = \frac{2\, dx\, d^2x + 2\, dy\, d^2y + 2\, dz\, d^2z}{dt^2}, \quad (5)$$

por causa da equação

$$dx \cos \lambda + dy \cos \mu + dz \cos \nu = o,$$

que significa o perpendicularismo da normal N com a tangente á trajectoria do movel (380), equação (4).

O segundo membro da equação (5) contendo no numerador a differencial de

$$dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

teremos :

$$2\,(X\, dx + Y\, dy + Zd\, z) = \frac{d\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2}$$

d'onde,

$$2\,(X\, dx + Y\, dy + Z\, dz) = \frac{d\, ds^2}{dt^2}.$$

Integrando, vem :

$$2 \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + C = \frac{ds^2}{dt^2};$$

d'onde, por ser

$$v = \frac{ds}{dt},$$

teremos:

$$v^2 = 2 \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + C.$$

Tal é a fórmula que nos permittirá o conhecimento directo da velocidade do movel, simplesmente por meio d'uma só integração, quando o trinomio differencial sob o signal de integração satisfizer ás condições de integrabilidade relativas ás tres variaveis (x, y, z). Sempre que esta integração fôr possivel, teremos:

$$v^2 = 2\,\varphi\,(x, y, z) + C. \qquad (6)$$

FIM DA PRIMEIRA PARTE

SEGUNDA PARTE

DYNAMICA DOS SYSTEMAS DE CORPOS

CAPITULO I

THEORIA GERAL DO MOVIMENTO D'UM SYSTEMA INVARIAVEL

397. Terminando no capitulo precedente a dynamica de um ponto material, emprehendamos agora o estudo da dynamica dos systemas materiaes; e comecemos por estabelecer a theoria do movimento de um systema de fórma invariavel. Uma tal theoria é certamente de natureza fundamental *porque nos torna normalmente sensivel a realidade dos estudos que, immediatamente concernentes a um ponto, podem a principio parecer illusorios ou vagos.*

398. Seja m a massa de qualquer dos pontos materiaes d'um systema invariavel inteiramente livre; e designemos, no fim do tempo t, por (x_1, y_1, z_1) as coordenadas rectangulas do centro de gravidade do solido considerado, relativas a um systema de eixos fixos no espaço. Sejam, no fim do mesmo tempo t, (x, y, z) as coordenadas variaveis d'um ponto qualquer do solido, relativas a um outro systema de eixos respectivamente parallelos aos primitivos e cuja origem seja o centro de gravidade do solido.

Representemos por X, Y, Z as componentes, avaliadas em unidades de peso, das forças applicadas á molecula m e consideradas respectivamente segundo as direcções dos eixos coordenados.

Isto posto, $(x_1 + x)$, $(y_1 + y)$, $(z_1 + z)$ serão, no fim do tempo t, as expressões geraes dos valores das coordenadas de uma qualquer das moleculas do solido, relativamente aos eixos primitivos. As componentes, segundo os eixos coordenados, das forças que imprimem á molecula m o movimento que ella tem effectivamente, por causa de sua ligação com as outras moleculas do solido, serão:

$$m\frac{d^2x_1 + d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y_1 + d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z_1 + d^2z}{dt^2};$$

d'onde

$$\left.\begin{aligned} & X - m\frac{d^2x_1 + d^2x}{dt^2}, \\ & Y - m\frac{d^2y_1 + d^2y}{dt^2}, \\ & Z - m\frac{d^2z_1 + d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

serão as expressões geraes dos valores das forças perdidas pela molecula m, segundo os eixos coordenados. Em virtude do principio de D'Alembert, devendo haver equilibrio em cada instante, entre as forças perdidas, isto é, entre as forças a que são devidos os movimentos que se neutralisam, lancemos mão das seis seguintes equações geraes do equilibrio d'um systema invariavel inteiramente livre:

$$\Sigma\,(P\cos\alpha) = 0,\ \Sigma\,(P\cos\beta) = 0,\ \Sigma\,(P\cos\gamma) = 0;$$

$$\Sigma\,P\,(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0,\ \Sigma\,P\,(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0,$$

$$\Sigma\,P\,(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0.$$

Substituindo agora, n'estas equações, em logar de $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$, os valores das forças perdidas (1); e em logar das variaveis (x, y, z), as quantidades $(x_1 + x)$, $(y_1 + y)$, $(z_1 + z)$, teremos:

$$\left.\begin{aligned} & \Sigma\left(X - m\frac{d^2x_1 + d^2x}{dt^2}\right) = 0, \\ & \Sigma\left(Y - m\frac{d^2y_1 + d^2y}{dt^2}\right) = 0, \\ & \Sigma\left(Z - m\frac{d^2z_1 + d^2z}{dt^2}\right) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\left(X - m\,\frac{d^2x_1 + d^2x}{dt^2}\right)(y_1 + y) - \\
&- \Sigma\left(Y - m\,\frac{d^2y_1 + d^2y}{dt^2}\right)(x_1 + x) = 0, \\
&\Sigma\left(Z - m\,\frac{d^2z_1 - d^2z}{dt^2}\right)(x_1 + x) - \\
&- \Sigma\left(X - m\,\frac{d^2x_1 + d^2x}{dt^2}\right)(z_1 + z) = 0, \\
&\Sigma\left(Y - m\,\frac{d^2y_1 + d^2y}{dt^2}\right)(z_1 + z) - \\
&- \Sigma\left(Z - m\,\frac{d^2z_1 + d^2z}{dt^2}\right)(y_1 + y) = 0.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(B)}$$

Taes são as seis equações geraes necessarias e sufficientes para definir o duplo movimento d'um systema invariavel inteiramente livre.

Examinemos separadamente os dous grupos de equações (A) e (B).

399. As coordenadas do centro de gravidade d'um systema invariavel qualquer sendo dadas pelas equações geraes,

$$x_1 = \frac{\Sigma\,(mx)}{\Sigma\,(m)},\; y_1 = \frac{\Sigma\,(my)}{\Sigma\,(m)},\; z_1 = \frac{\Sigma\,(mz)}{\Sigma\,(m)},$$

teremos, por ser a origem dos novos eixos situada no centro de gravidade, as relações seguintes :

$$\Sigma\,(mx) = 0,\ \Sigma\,(my) = 0,\ \Sigma\,(mz) = 0\,;$$

as quaes, differenciadas duas vezes successivamente, em relação a t, mudam-se nas seguintes:

$$\Sigma\, m\,\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ \Sigma\, m\,\frac{d^2y}{dt^2} = 0,\ \Sigma\, m\,\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

D'est'arte, as tres equações (A) se reduzirão á fórma:

$$\Sigma\left(X - m\,\frac{d^2x_1}{dt^2}\right) = 0,\ \Sigma\left(Y - m\,\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) =$$

$$= 0,\ \Sigma\left(Z - m\,\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) = 0\,;$$

d'onde,

$$\Sigma X = \Sigma m \frac{d^2x_1}{dt^2}, \Sigma Y = \Sigma m \frac{d^2y_1}{dt^2}, \Sigma Z = \Sigma m \frac{d^2z_1}{dt^2};$$

ou, designando por M toda a massa do solido,

$$\Sigma X = M \frac{d^2x_1}{dt^2}, \Sigma Y = M \frac{d^2y_1}{dt^2}, \Sigma Z = M \frac{d^2z_1}{dt^2}. \quad (C)$$

Examinando a fórma d'estas tres ultimas equações differenciaes, vemos que ellas só contendo as coordenadas do centro de gravidade e não dependendo das outras coordenadas dos differentes pontos do systema, servirão para determinar, em cada instante, as coordenadas (x_1, y_1, z_1). Si concebessemos que a massa M do solido fosse toda reunida em seu centro de gravidade, sobre o qual actuassem as forças ΣX, ΣY, ΣZ, é claro que todas estas forças se reduziriam, em cada instante, a tres forças unicas que solicitariam o referido centro como si elle fosse um ponto livre; e as equações d'este movimento seriam exactamente as mesmas que as tres equações do grupo (C). Portanto, o movimento de translação d'um systema inteiramente livre, definido algebricamente pelas tres equações do grupo (C), é o mesmo que o de seu centro de gravidade; o qual se move como si toda a massa do systema fosse n'elle concentrada e como si todas as forças, instantaneas ou continuas, lhe fossem directamente applicadas. Os primeiros membros das equações (C) não conterão as componentes das forças interiores ao systema que se considera. Com effeito, as acções mutuas dos differentes pontos do solido sendo duas a duas iguaes e contrarias, conforme a terceira lei do movimento, é claro que sendo transportadas para o centro de gravidade fornecerão necessariamente uma resultante nulla. Assim, o movimento do centro de gravidade d'um solido livre é exclusivamente devido á acção das forças exteriores ao mesmo systema. « Ellas movem o corpo como si actuassem sobre um só ponto, cujo estudo geral, até aqui preliminar, torna-se

assim definitivo, o que deve plenamente justificar os cuidados que esse estudo inspirava antes que o seu destino fosse sufficientemente apreciavel ». (A. Comte.)

400. Passemos agora ao exame das tres equações do grupo (B). Considerando a primeira d'estas equações, ella poderá ser escripta assim:

$$\Sigma\, Xy_1 - \Sigma\, my_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + \Sigma\, Xy - \Sigma\, my \frac{d^2x}{dt^2} - \Sigma\, Yx_1 +$$

$$+ \Sigma\, mx_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} - \Sigma\, Yx + \Sigma\, mx \frac{d^2y}{dt^2} = 0;$$

ou, o que é o mesmo,

$$y_1 \left(\Sigma\, X - M \frac{d^2x_1}{at^2} \right) - x_1 \left(\Sigma\, Y - M \frac{d^2y_1}{dt^2} \right) + \Sigma (Xy - Yx) =$$

$$= \Sigma\, m \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right);$$

d'onde, attendendo às equações do grupo (C), resultará:

$$\Sigma (Xy - Yx) = \Sigma\, m \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right). \qquad \text{(D)}$$

Analogamente, as duas ultimas equações do grupo (B) nos dariam:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma (Zx - Xz) = \Sigma\, m \left(x \dfrac{d^2z}{dt^2} - z \dfrac{d^2x}{dt^2} \right), \\ \Sigma (Yz - Zy) = \Sigma\, m \left(z \dfrac{d^2y}{dt^2} - y \dfrac{d^2z}{dt^2} \right). \end{array}\right\} \qquad \text{(E)}$$

As tres equações (D) e (E), que definem o movimento de rotação do systema em torno do seu centro de gravidade, não contendo as coordenadas (x_1, y_1, z_1) fazem concluir que a rotação do solido é independente da translação do seu centro de gravidade. Ellas nos poderão permittir o conhecimento das diversas posições dos pontos do solido relativamente aos tres eixos moveis que passam pelo centro de gravidade. E como estas equações não se modificariam si applicassemos a este centro forças que, em cada instante, o tornassem fixo, pois que os primeiros membros d'essas equações não poderiam conter forças que passassem por esse centro, em vista de

serem nullos os seus momentos em relação a esse ponto, segue-se, evidentemente, que a rotação definida pelas equações (D) e (E) é uma rotação que teria logar como si o centro de gravidade fosse fixo.

« Nós podemos assim systematisar a decomposição geral do movimento em translação e rotação; porque ellas tornam-se plenamente separaveis para com o centro de gravidade. Emquanto o ponto ao qual as referimos fica qualquer, sua distincção só póde fornecer realmente uma imagem geometrica, sem facilitar o estudo dynamico, porque ellas ficam naturalmente dependentes uma da outra.» (A. Comte.)

401. O movimento de translação de um ponto tendo sido detalhadamente estudado nos dous capitulos precedentes, nos achamos reduzidos á apreciação exclusiva da rotação do solido que consideramos. Ora, o simples exame das equações da rotação nos mostra que, logicamente, estas equações bastariam para definir este movimento do solido; mas, a habitual complicação d'essas equações differenciaes faz-nos ver *que essa instituição tornar-se-hia scientificamente illusoria*. Assim, o problema da rotação de um solido invariavel necessita de equações que não contenham mais as coordenadas dos seus differentes pontos; e foi o que fez Leonardo Euler, encarando o problema da rotação dos solidos invariaveis de uma outra maneira. As equações dadas por este eminente geometra encerram a *velocidade angular* commum aos differentes pontos do solido e satisfazem plenamente ao problema. N'esse estudo especial, que faremos nos dous ultimos capitulos d'este livro, nos occuparemos tambem do *eixo movel* em torno do qual o solido gyra em cada instante de seu movimento.

402. Qualquer que seja a trajectoria no espaço, de qualquer dos pontos materiaes de um solido livre, podemos sempre consideral-a como um polygono de numero infinito de elementos rectilineos e infinitamente pequenos. Ora, a helice sendo uma curva reversa cuja torsão é constante em cada um dos seus pontos, poderá muito convenientemente ser empregada para medir a segunda curvatura de uma

curva reversa qualquer. Sendo assim, *poderemos substituir, em cada instante, tres elementos consecutivos da trajectoria de cada ponto do solido pelo arco correspondente da helice osculatriz*. Deste modo, *cada ponto movendo-se em helice, todos os pontos do solido invariavel descreverão, em cada instante, helices semelhantes em torno de um mesmo eixo*; e como a helice póde ser concebida como a curva descripta por um qualquer dos pontos da *porca* percorrendo, sem attrito, o respectivo *parafuso*, é claro que podemos, em cada instante, assimilar a este movimento unico, o duplo movimento de um solido invariavel inteiramente livre. D'onde, esta imagem geometrica simplifica a combinação entre a translação e a rotação do solido, mostrando-nos que, *em cada instante, o eixo da rotação é parallelo á direcção da translação*.

Eis ahi em que consiste a imagem geometrica, devida a Poinsot, exposta segundo a bella concepção de A. Comte sobre a helice osculatriz.

CAPITULO II

THEORIA DO MOVIMENTO D'UM SYSTEMA VARIAVEL

---

403. Lagrange, combinando o principio de D'Alembert com a lei das velocidades virtuaes, estabeleceu uma fórmula geral para a solução de todos os problemas sobre o movimento d'um systema material qualquer. Para conhecermos esta fórmula, seja m a massa de qualquer dos pontos materiaes d'um systema qualquer de figura variavel; designemos por (x, y, z) as tres coordenadas rectangulas da molecula m no fim do tempo t; e representemos por X, Y, Z as componentes, no sentido dos eixos coordenados, das forças exteriormente applicadas ao ponto m, componentes avaliadas em unidades de peso.

Em virtude do principio de D'Alembert, *devendo haver, em cada instante, equilibrio entre as forças primitivas que animam a todos os pontos do systema suppostos livres e as forças proprias aos movimentos effectivos, quando estas são tomadas em sentido contrario*; tendo já representado por X, Y, Z as componentes, segundo os eixos coordenados, das forças primitivamente impressas ao ponto m; e sendo as forças que effectivamente animam a este ponto expressas, segundo os mesmos eixos, por

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2},\; m\,\frac{d^2y}{dt^2},\; m\,\frac{d^2z}{dt^2}:$$

é claro que podemos substituir na equação geral do equilibrio,

$$\Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0,$$

as quantidades X, Y, Z respectivamente por

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Assim, resultará a equação

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \right.$$
$$\left. + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0, \qquad (1)$$

que é a *equação geral da dynamica*. Ella exprime, d'uma maneira implicita, todas as condições geraes do movimento do systema.

Si a essa equação reunirmos as equações que definem o modo de ligação dos differentes pontos do systema,

$$L=0,\ M=0,\ N=0,\ldots, \qquad (2)$$

teremos todas as equações necessarias para a completa determinação das circumstancias proprias ao movimento do systema que consideramos. A unica condição a que as variações δx, δy, δz, $\delta x'$, etc., são sujeitas é de satisfazerem ás equações de ligação. Com effeito, pois que estas variações representam as projecções, sobre os eixos coordenados, dos caminhos infinitamente pequenos que seriam descriptos pelos pontos materiaes do systema, si o systema mudasse infinitamente pouco a figura que possuia no fim do tempo t. Assim, as equações (2) exprimindo as ligações que existem entre todos os pontos do systema, as variações δx, δy, δz, $\delta x'$, etc. deverão satisfazer ás equações seguintes :

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dL}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dL}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dL}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dL}{dx'}\right)\delta x' + \text{etc.} = 0,\\
&\left(\frac{dM}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dM}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dM}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dM}{dx'}\right)\delta x' + \text{etc.} = 0,\\
&\left(\frac{dN}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dN}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dN}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dN}{dx'}\right)\delta x' + \text{etc.} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

etc., etc., etc. Si mesmo a variavel t entrasse nas equações (2), as differenciações por δ não poderiam ser tomadas em relação a esta variavel e nas equações (3) considera-

riamos t como uma constante. De facto, cada deslocamento virtual attribuido ao systema é supposto compativel com as suas ligações e estas continuam as mesmas que eram no fim do tempo t.

D'aqui resulta que não podemos sempre confundir δx, δy, δz, $\delta x'$, etc., respectivamente, com dx, dy, dz, dx', etc., pois que *estas quantidades representam os caminhos realmente percorridos pelos differentes pontos do systema no instante dt que segue o tempo t, por causa do movimento actual d'este systema*. Só quando as equações de ligações

$$L=0,\ M=0,\ N=0,\ldots,$$

forem independentes do tempo, é que podemos confundir δx, δy, δz, etc., respectivamente, com dx, dy, dz, etc.

Com effeito, n'este caso a equação differencial

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)dx+\left(\frac{dL}{dy}\right)dy+\left(\frac{dL}{dz}\right)dz+\left(\frac{dL}{dx'}\right)\delta x'+\text{etc.}=0,$$

tendo com a equação

$$\left(\frac{dL}{dx}\right)\delta x+\left(\frac{dL}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{dL}{dz}\right)\delta z+\left(\frac{dL}{dx'}\right)\delta x'+\text{etc.}=0,$$

o mesmo numero de termos, é claro que poderemos fazer

$$\delta x=dx,\ \delta y=dy,\ \delta z=dz,\ \delta x'=dx',\ \text{etc.}$$

404. Devendo ser eliminadas da fórmula geral da dynamica as variações das coordenadas que não forem independentes, nos serviremos do *methodo dos multiplicadores*. Assim, multipliquemos respectivamente cada uma das equações (3) por um coefficiente indeterminado e ajuntemos todas estas equações á equação (1). Igualando separadamente a zero o coefficiente de cada variação independente, teremos as equações parciaes do movimento

que a solução do problema exige ; e eliminando d'estas equações os multiplicadores auxiliares, as equações finaes unidas ás condições (2) de ligação do systema, nos darão as variaveis incognitas (x, y, z), (x', y', z'), etc., por meio do tempo t. Assim, as equações parciaes do movimento serão :

$$\left.\begin{aligned}
&X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \text{etc.} = 0,\\
&Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \text{etc.} = 0,\\
&Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \text{etc.} = 0,\\
&X' - m\frac{d^2x'}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \text{etc.} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

etc., etc., etc. O numero d'estas equações sendo exactamente o mesmo que o das coordenadas dos differentes pontos do systema considerado, seja este numero igual a m; e as equações de ligação sejam em numero n.

Portanto, si das m equações (4) são eliminados os n multiplicadores auxiliares (pois são tantos quantas as equações que definem o systema), resultará um grupo de $(m - n)$ equações. Este grupo de $(m - n)$ equações reunido ás n equações

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0, \ldots.$$

constituirá, em geral, um systema determinado de equações proprio a dar-nos os valores de (x, y, z), (x', y', z'), etc., em uma época qualquer.

403. *Os multiplicadores λ, μ, ν, etc. determinam os esforços que experimentam os laços physicos do systema e designam as forças perdidas.*— Para o provarmos, examinemos as equações (4).

Não será difficil reconhecer-se que estas equações seriam evidentemente as mesmas si em logar da equação $L = 0$ ti-

vessemos de considerar além das forças exteriores outras novas forças cujas componentes segundo os eixos coordenados fossem, respectivamente,

$$\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right);$$
$$\lambda\left(\frac{dL}{dx'}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dy'}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dz'}\right);$$
$$\lambda\left(\frac{dL}{dx''}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dy''}\right), \lambda\left(\frac{dL}{dz''}\right);$$

Ora, isto só aconteceria si a ligação definida pela equação L = 0 produzisse realmente estas forças.

A força que tivesse de ser applicada ao ponto cujas coordenadas são (x, y, z) seria de intensidade expressa por

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}.$$

Ella seria sempre normal á superficie definida pela equação L = 0, cujas variaveis unicas seriam (x, y, z). Com effeito, pois que

$$\left(\frac{dL}{dx}\right), \left(\frac{dL}{dy}\right), \left(\frac{dL}{dz}\right),$$

são valores proporcionaes aos cosenos dos angulos que a normal a essa superficie faz respectivamente com os tres eixos rectangulares.

Analogamente as equações

$$M = 0, N = 0, P = 0, \ldots,$$

poderiam deixar de ter logar si fossem applicadas novas forças a todos os pontos do systema. *Estas forças auxiliares, que podem substituir as ligações que existem entre todos os pontos, são as que produzem as tensões e as pressões nas ligações do systema.*

Supprimindo todas as ligações, os pontos do systema ficarão completamente livres; e as forças exteriormente applicadas a estes pontos e representadas nas equações (4) por

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2},\ \text{etc.}$$

serão respectivamente destruidas, em cada instante, pelas forças expressas pelos termos affectos dos multiplicadores; e como as forças perdidas são exactamente equivalentes ás forças exteriores consideradas, conclue-se que os multiplicadores designam as forças perdidas do systema.

Fica assim terminado o estudo da fórmula geral da dynamica.

406. Para mostrarmos como é fecunda a fórmula geral da dynamica, comecemos por fazer uma simples applicação desta fórmula ao caso em que o movel reduz-se a um só ponto material. N'este caso, suppondo a massa da molecula considerada igual á unidade, a fórmula geral da dynamica se reduzirá a

$$\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0. \quad (5)$$

Caso do ponto livre — Suppondo que o ponto seja livre, a equação precedente se decomporá nas tres equações seguintes:

$$X = \frac{d^2x}{dt^2},\ Y = \frac{d^2y}{dt^2},\ Z = \frac{d^2z}{dt^2};$$

que são, como vimos, as tres equações differenciaes do movimento curvilineo de um ponto livre.

Caso do ponto sobre uma superficie — Quando o ponto dado for supposto mover-se sobre uma superficie fixa, representada pela equação

$$F(x, y, z) = 0,$$

devemos reunir á equação (5) a seguinte equação:

$$\lambda\left(\frac{dF}{dx}\right)\delta x+\lambda\left(\frac{dF}{dy}\right)\delta y+\lambda\left(\frac{dF}{dz}\right)\delta z=0; \qquad (6)$$

d'onde resultará a equação

$$\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dx}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dy}\right)\delta y+$$
$$+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dz}\right)\delta z=0,$$

que se decomporá evidentemente nas seguintes equações parciaes:

$$\left.\begin{array}{c} X-\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dx}=0,\ Y-\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dy}=0, \\ Z-\frac{d^2z}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dz}=0. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Das equações (7), eliminando-se o multiplicador λ teremos:

$$\frac{dF}{dx}\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)+\frac{dF}{dz}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$
$$\frac{dF}{dy}\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)+\frac{dF}{dz}\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$

que são as duas equações differenciaes do movimento do ponto sobre a superficie dada. Estas equações reunidas á equação da superficie,

$$F(x, y, z)=0,$$

constituirão um systema proprio á determinação de todas as circumstancias do movimento. O valor de λ será o da pressão do movel sobre a superficie dada, dirigida segundo a normal á superficie.

Caso do ponto sobre uma curva — Si, finalmente, o ponto é obrigado a mover-se sobre a curva fixa, definida pelas equações

$$F(x, y, z)=0, \quad \varphi(x, y, z)=0,$$

devemos reunir á equação (5) as duas equações differenciaes seguintes :

$$\lambda\left(\frac{dF}{dx}\right)\delta x+\lambda\left(\frac{dF}{dy}\right)\delta y+\lambda\left(\frac{dF}{dz}\right)\delta z=0,$$

$$\mu\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\delta x+\mu\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\delta y+\mu\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\delta z=0;$$

d'onde, teremos a seguinte equação geral :

$$\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dx}+\mu\frac{d\varphi}{dx}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dy}+\right.$$

$$\left.+\mu\frac{d\varphi}{dy}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dz}+\mu\frac{d\varphi}{dz}\right)\delta z=0,$$

da qual resultarão as seguintes equações parciaes:

$$X-\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dx}+\mu\frac{d\varphi}{dx}=0,$$

$$Y-\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dy}+\mu\frac{d\varphi}{dy}=0,$$

$$Z-\frac{d^2z}{dt^2}+\lambda\frac{dF}{dz}+\mu\frac{d\varphi}{dz}=0,$$

Eliminando os multiplicadores λ e μ das equações precedentes, vem :

$$\frac{dF}{dz}\left[\frac{d\varphi}{dx}\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\frac{d\varphi}{dy}\left(X-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{d\varphi}{dz}\left[\frac{dF}{dy}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)-\frac{dF}{dx}\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right]+$$

$$+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\left(\frac{dF}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dy}-\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\right)=0.$$

Tal é a equação differencial que, reunida ás equações

$$F(x,y,z)=0,\ \varphi(x,y,z)=0,$$

formará um systema apto a dar-nos todas as circumstancias do movimento do ponto sobre a curva dada. Por ser esta curva a intersecção das duas superficies representadas

pelas equações dadas, os dous multiplicadores λ e μ nos permittirão o conhecimento das pressões que o movel exerce sobre a curva, normalmente ás duas superficies consideradas.

407. A theoria do movimento curvilineo, que acaba de ser resumida pela fórmula geral da dynamica, foi estabelecida como um simples exercicio do methodo geral dado por esta fórmula para a solução de todos os problemas da dynamica.

Ella, porém, deve conservar a sua filiação á theoria geral do movimento rectilineo, pois o principio de d'Alembert é só verdadeiramente destinado aos systemas materiaes. Como comprehender-se a lei de d'Alembert no caso de uma só molecula dada? Pois esta lei não é só relativa aos systemas?...

408. A equação geral da dynamica institue o mais uniforme dos methodos que a mecanica geral possue. Resultante de dous principios geraes, um relativo á estatica, outro relativo á dynamica, essa equação reduz os problemas da dynamica dos systemas a puras questões de calculo.

Si, como vimos na estatica, mui difficeis eram os problemas sobre o equilibrio dos systemas variaveis, ainda mais complicados são os do movimento de taes systemas. « Basta caracterisar a complicação propria ao estudo do movimento em que se deve, além das forças primitivas essencialmente dadas, considerar as forças effectivas sempre incognitas. Limitadas aos systemas descontinuos, as questões estaticas só podem exigir differenciações; ao passo que os problemas dynamicos são constantemente subordinados á integração, de modo a deverem raramente obter solução completa ». (A. Comte.)

Afim de justificarmos as considerações que acabamos de transcrever, e mesmo afim de fixarmos as nossas idéas sobre as applicações da fórmula geral da dynamica ao movimento dos systemas descontinuos e continuos, vamos considerar alguns problemas que poderão servir de typos para todas as demais questões analogas.

409. PRIMEIRO PROBLEMA. — *Determinar o movimento de dous corpos invariavelmente ligados e inteiramente livres no espaço.*

Supponhamos que os dous corpos possam ser considerados como pontos materiaes e sejam as suas massas iguaes á unidade. Seja a a distancia invariavel que existe entre os dous corpos; e designemos por (x, y, z) e por (x', y', z') as coordenadas rectangulas dos centros de gravidade dos mesmos corpos, no fim do tempo t. A equação geral do movimento do systema que consideramos será:

$$\left.\begin{aligned} &\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \\ &+ \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z + \left(X' - \frac{d^2x'}{dt^3}\right)\delta x' + \\ &+ \left(Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y' + \left(Z' - \frac{d^2z'}{dt^2}\right)\delta z' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

A equação de ligação que define o systema será:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = a^2;$$

d'onde, differenciando-a com o signal δ, teremos:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x - x'}{a}(\delta x - \delta x') + \frac{y - y'}{a}(\delta y - \delta y') + \\ &+ \frac{z - z'}{a}(\delta z - \delta z') = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Multiplicando a equação (9) pela indeterminada λ e ajunctando a equação resultante com a equação (8), virá:

$$\begin{aligned} &\left(X + \lambda\frac{x - x'}{a} - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y + \lambda\frac{y - y'}{a} - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \\ &+ \left(Z + \lambda\frac{z - z'}{a} - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z + \left(X' + \lambda\frac{x' - x}{a} - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' + \\ &+ \left(Y' + \lambda\frac{y' - y}{a} - \frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y' + \left(Z' + \lambda\frac{z' - z}{a} - \frac{d^2z'}{dt'}\right)\delta z' = 0. \end{aligned}$$

d'onde, por serem arbitrarias as variações das coordenadas dos dous pontos, teremos:

$$X + \lambda \frac{x - x'}{a} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ Y + \lambda \frac{y - y'}{a} - \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$Z + \lambda \frac{z - z'}{a} - \frac{d^2z}{dt^2} = 0,\ X' + \lambda \frac{x' - x}{a} - \frac{d^2x'}{dt^2} = 0,$$

$$Y' + \lambda \frac{y' - y}{a} - \frac{d^2y'}{dt^2} = 0,\ Z' + \lambda \frac{z' - z}{a} - \frac{d^2z'}{dt^2} = 0.$$

Eliminando-se λ d'estas equações resultarão as tres seguintes equações distinctas:

$$X + X' = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2},\ Y + Y' = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt^2},$$

$$Z + Z' = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{d^2z'}{dt^2};$$

as quaes, reunidas á equação

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = a^2,$$

não serão sufficientes para a determinação do movimento do systema, mesmo quando a integração fosse possivel.

Este simples caso, o mais simples dos que nos offerece o movimento de um systema de projectis invariavelmente ligados, vem exhuberantemente mostrar-nos a difficuldade da solução completa dos problemas sobre o movimento dos systemas descontinuos.

410. SEGUNDO PROBLEMA.— *Uma cadeia homogenea e pesada, move-se verticalmente sobre uma roldana, sem attrito: qual é a lei do movimento de um tal systema?*

Supponhamos (fig. 133), que ABA' seja a cadeia homogenea, obrigada a mover-se verticalmente sobre uma roldana, sem attrito. Sejam a o comprimento da cadeia e ρ a sua densidade. Designemos por z a parte AB da cadeia e por z' a outra parte A'B. Resultará que

$$z + z' = a, \qquad (10)$$

Seja g a força acceleratriz que anima a uma qualquer das moleculas da cadeia que consideramos. A equação geral do movimento do systema será evidentemente

$$\Sigma m \left[\left(g - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z\right] + \Sigma m' \left[\left(g - \frac{d^2 z'}{dt^2}\right) \delta z'\right] = 0. \qquad (11)$$

Supposta homogenea a cadeia e de uma espessura constante, teremos:

$$\Sigma m = \rho \,.\, z \text{ e } \Sigma m' = \rho \,.\, z';$$

d'onde, a equação (11) se reduzirá á fórma seguinte:

$$z \left(g - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z + z' \left(g - \frac{d^2 z'}{dt^2}\right) \delta z' = 0. \qquad (12)$$

A equação (10) dá-nos:

$$\delta z' = -\delta z;$$

portanto, a equação (12) se mudará na seguinte:

$$z \left(g - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) \delta z - z' \left(g - \frac{d^2 z'}{dt^2}\right) \delta z = 0;$$

d'onde,

$$z \left(g - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) = z' \left(g - \frac{d^2 z'}{dt^2}\right). \qquad (13)$$

Da equação (10) deduz-se:

$$z' = a - z;$$

d'onde, a equação (13) tomará a fórma:

$$z \left(g - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) - (a - z)\left(g - \frac{d^2 (a - z)}{dt^2}\right) = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{2g}{a} z + g = 0. \qquad (14)$$

Fazendo

$$K^2 = \frac{2g}{a},$$

resulta:

$$g = \frac{K^2 a}{2};$$

d'onde, substituindo estes dous valores na equação (14), teremos:

$$\frac{d^2z}{dt^2} - K^2\left(z - \frac{a}{2}\right) = 0. \qquad (15)$$

Fazendo

$$z - \frac{a}{2} = u, \qquad (16)$$

teremos:

$$dz = du,\ d^2z = d^2u;$$

d'onde, a equação (15) se mudará em

$$\frac{d^2u}{dt^2} - K^2u = 0,$$

ou

$$\frac{d^2u}{dt^2} 2\,du = 2\,K^2 u du;$$

d'onde, integrando, vem:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = K^2\ (u^2 + c^2),$$

ou

$$\frac{du}{dt} = K\sqrt{u^2 + c^2};$$

d'onde,

$$Kdt = \frac{du}{\sqrt{u^2 + c^2}}.$$

Integrando, vem :

$$Kt = l.\,(u + \sqrt{u^2 + c^2}) + l.\,c',$$

ou

$$Kt = l.\,(u + \sqrt{u^2 + c^2})\,c';$$

d'onde,

$$e^{Kt} = c'\,(u + \sqrt{u^2 + c^2}), \qquad (17)$$

designando por e a base dos logarithmos neperianos.

Da equação (17) deduz-se :

$$u + \sqrt{u^2 + c^2} = \frac{1}{c'}\,.\,e^{Kt} = c''\,.\,e^{Kt}. \qquad (18)$$

Da identidade

$$(u + \sqrt{u^2 + c^2})\,(-u + \sqrt{u^2 + c^2}) = c^2,$$

tira-se:

$$-u + \sqrt{u^2 + c^2} = \frac{c^2}{u + \sqrt{u^2 + c^2}} = \frac{c^2}{c''\,e^{Kt}} = \frac{c^2}{c''}\,.\,e^{-Kt};$$

d'onde:

$$-u + \sqrt{u^2 + c^2} = \frac{c^2}{c''}\,.\,e^{-Kt}. \qquad (19)$$

Combinando as equações (18) e (19), teremos:

$$2\,u = c''\,e^{Kt} - \frac{c^2}{c''}\,.\,e^{-Kt};$$

d'onde,

$$u = C\,.\,e^{Kt} - C'\,.\,e^{-Kt}.$$

Substituindo este valor na equação (16), temos:

$$z = \frac{a}{2} + C.e^{Kt} - C'.e^{-Kt};$$

e por ser

$$K = \sqrt{\frac{2g}{a}},$$

resultará :

$$z=\frac{a}{2}+\mathrm{C}.e^{t\sqrt{\frac{2g}{a}}}-\mathrm{C}'e^{-t\sqrt{\frac{2g}{a}}},\qquad (20)$$

C e C' sendo duas constantes que se determinarão para o estado inicial do movimento.

A equação (20) é a equaçãos do movimento: ella nos dará todas as circumstancias do phenomeno.

111. TERCEIRO PROBLEMA—*Qual é a lei do movimento d'um fio perfeitamente flexivel e inextensivel ?*

Seja m a massa da unidade de comprimento do fio e supponhamos que s seja o comprimento do arco da curva do fio comprehendida entre uma extremidade supposta fixa e um qualquer de seus pontos ; designemos por (x, y, z) as coordenadas rectangulas que definem a posição, no fim do tempo t, do extremo livre do arco s.

Por ser a massa do elemento do fio que segue-se á extremidade livre do arco s igual á mds, as componentes, segundo os tres eixos coordenados, das forças perdidas pelo elemento ds, serão simplesmente

$$-\,mds\,\frac{d^2x}{dt^2},\ -\,mds\,\frac{d^2y}{dt^2},\ -\,mds\,\frac{d^2z}{dt^2},$$

por não serem dadas as forças primitivas. Assim, a equação geral do movimento será :

$$\int mds\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)=0\qquad (21)$$

Por ser supposto inextensivel o fio, teremos: $ds=\text{const.}$; d'onde,

$$\delta\, ds=0;$$

portanto,

$$\int\lambda\delta\, ds=0.\qquad (22)$$

Reunindo a equação (22) á equação (21), virá :

$$\int mds\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)\int\lambda\delta\, ds=0,\qquad (23)$$

equação que exprimirá as circumstancias proprias ao movimento do systema.

Ora, sabe-se que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

portanto,

$$\delta\, ds = \frac{dx}{ds}\delta\, dx + \frac{dy}{ds}\delta\, dy + \frac{dz}{ds}\delta\, dz;$$

d'onde,

$$\lambda\delta\, ds = \frac{\lambda dx}{ds}\delta\, dx + \frac{\lambda dy}{ds}\delta dy + \frac{\lambda dz}{ds}\delta\, dz\ ;$$

portanto,

$$\int \lambda\delta\, ds = \int \frac{\lambda dx}{ds}\delta\, dx + \int \frac{\lambda dy}{ds}\delta dy + \int \frac{\lambda dz}{ds}\delta dz =$$

$$= \int \frac{\lambda dx}{ds} d\,\delta\, x + \int \frac{\lambda\, dy}{ds} d\,\delta\, y + \int \frac{\lambda dz}{ds}\delta\, d\, z =$$

$$= \frac{\lambda dx}{ds}\delta\, x + \frac{\lambda dy}{ds}\delta\, y + \frac{\lambda dz}{ds}\delta\, z + \mathrm{K} -$$

$$- \int \left(d\,\frac{\lambda\, d\, x}{ds} \right)\delta\, x + \left(d\,\frac{\lambda dy}{ds} \right)\delta\, y + \left(d\,\frac{\lambda dz}{ds} \right)\delta z \Big],$$

sendo K uma constante arbitraria.

Substituindo o valor de

$$\int \lambda\delta\, ds$$

na equação (23), vem :

$$\left(\frac{\lambda\, dx}{ds}\delta x + \frac{\lambda\, dy}{ds}\delta y + \frac{\lambda\, dz}{ds}\delta\, z + \mathrm{K} \right) +$$

$$+ \int \Big[\left(mds\,\frac{d^2x}{dt^2} - d\,\frac{\lambda dx}{ds} \right)\delta x + \left(mds\,\frac{d^2y}{dt^2} - d\,\frac{\lambda dy}{ds} \right)\delta y +$$

$$+ \left(mds\,\frac{d^2z}{dt^2} - d\,\frac{\lambda dz}{ds} \right)\delta z \Big] = 0\ ;$$

d'onde, as duas equações seguintes :

$$\left. \begin{aligned} &\left(mds \frac{d^2x}{dt^2} - d \frac{\lambda dx}{ds} \right) \delta x + \left(mds \frac{d^2y}{dt^2} - d \frac{\lambda dy}{ds} \right) \delta y + \\ &\quad + \left(mds \frac{d^2z}{dt^2} - d \frac{\lambda dz}{ds} \right) \delta z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left(\frac{\lambda dx}{ds} \delta x + \frac{\lambda dy}{ds} \delta y + \frac{\lambda dz}{ds} \delta z + \text{K} \right) = 0. \qquad (25)$$

A equação (24) dá-nos :

$$mds \frac{d^2x}{dt^2} = d \frac{\lambda dx}{ds}, \quad mds \frac{d^2y}{dt^2} = d \frac{\lambda dy}{ds},$$

$$mds \frac{d^2z}{dt^2} = d \frac{\lambda dz}{ds};$$

d'onde,

$$\frac{\lambda dx}{ds} = \text{A} + \int mds \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{\lambda dy}{ds} = \text{B} + \int mds \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\frac{\lambda dz}{ds} = \text{C} + \int mds \frac{d^2z}{dt^2},$$

sendo A, B, C, tres constantes arbitrarias. Eliminando λ d'estas tres equações, teremos :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\text{A} + \int mds \frac{d^2x}{dt^2}}{\text{C} + \int mds \frac{d^2z}{dt^2}}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\text{B} + \int mds \frac{d^2y}{dt^2}}{\text{C} + \int mds \frac{d^2z}{dt^2}},$$

Taes são as equações differenciaes do movimento do fio, as quaes devem ser reunidas á equação de ligação $ds = \text{const}$.

Estas tres equações constituirão um systema, que bem nos poderia fornecer todas as circumstancias proprias ao movimento do fio, si o calculo integral o permittisse ; mas, no estado actual dos nossos conhecimentos, em nenhum caso sabemos concluir a questão, isto é, chegar a conhecer as leis do movimento do fio. O problema, fica, portanto, insoluvel.

Quanto á equação (25), ella se destinará à determinação do valor de λ na extremidade livre do arco s do fio considerado.

Muitas outras applicações poderiamos ainda fazer ; mas, nos parece que, as que ahi ficam, são sufficientes para dar ao leitor uma idèa exacta do methodo geral que a sciencia possue para o estudo do movimento d'um systema qualquer, descontinuo ou continuo.

412. O estudo que acaba de ser feito sobre a theoria do movimento d'um systema variavel só nos interessa realmente sob o ponto de vista logico. De facto, as theorias propriamente do dominio da Mecanica geral pertencem exclusivamente aos solidos invariaveis : *cujas noções, communs a todas as constituições materiaes, são as mais geraes.*

Para completarmos o estudo logico da theoria do movimento dos systemas variaveis, devemos apreciar o movimento dos fluidos, que são os systemas dotados da mais extrema variabilidade ; mas, o movimento dos fluidos não póde ser estabelecido sem a theoria do equilibrio de taes systemas, estudo que fica opportuno n'este capitulo e que se acharia muito isolado si fosse feito antes da dynamica.

HYDROSTATICA

413. Dois são os methodos geraes que pódem conduzir-nos ao conhecimento das leis do equilibrio dos fluidos : um *directo,* unicamente proprio aos corpos em estado fluido ; outro *indirecto,* exclusiva applicação d'uma lei geral já estabelecida para a estática dos corpos solidos.

Historicamente considerando, o methodo directo é devido a Clairaut, que, em 1743, escreveu a *Theoria da Figura da Terra, deduzida dos principios da Hydrostatica ;* mas, Euler, em 1755, aperfeiçoou a marcha seguida por Clairaut, sem introduzir nenhuma condição nova. A' Lagrange devemos o methodo indirecto, que é uma das mais bellas

applicações da lei geral das velocidades virtuaes. Este methodo tem um destino altamente philosophico pois que nos prova, á evidencia, que a estática dos corpos fluidos rege-se pelas mesmas leis geraes relativas aos corpos solidos : *elle subordina a hydrostatica á estática.*

414. Methodo directo.— Clairaut, para estabelecer as equações geraes do equilibrio dos fluidos, fundou-se no principio hydrostatico que consiste em que : *o equilibrio d'uma massa fluida exige que os esforços de todas as partes do fluido, contidas em um canal qualquer infinitamente pequeno se destruam mutuamente;* mas, como observa Lagrange, este principio é uma simples consequencia da lei geral relativa ao equilibrio dos fluidos, conhecida pelo nome de *principio da igualdade de pressão em todos os sentidos ;* e Euler, partindo directamente do conhecimento d'este principio, que a experiencia confirma, deduziu, com a maxima facilidade, as equações geraes do equilibrio dos fluidos. Assim, deixando de parte a marcha instituida por Clairaut, preferiremos a marcha seguida por Euler.

Imaginemos que um systema fluido em equilibrio seja dividido em pequenos parallelipipedos rectangulos, por tres séries de planos infinitamente proximos e respectivamente parallelos a tres planos perpendiculares fixos. Sejam, (fig. 134), Ox, Oy, Oz, intersecções dos tres planos fixos, os eixos coordenados a que possamos referir as posições de todas as moleculas do systema fluido.

Consideremos o parallelipipedo rectangulo cujos vertices d e g tenham respectivamente para coordenadas (x, y, z) e $(x + dx)$, $(y + dy)$, $(z + dz)$; e seja ρ a densidade do fluido no ponto d.

Designemos por X, Y, Z as componentes segundo os eixos da força acceleratriz que anima a cada uma das moleculas do fluido e por dm a massa do parallelipipedo considerado. Seja, finalmente, p a pressão supportada pela molecula cujas coordenadas são (x, y, z).

Imaginando que o fluido contido no parallelipipedo se solidificasse, o equilibrio supposto ainda subsistiria ; e para

que este equilibrio tenha logar, será evidentemente preciso que sejam respectivamente destruidas as componentes das forças segundo cada um dos eixos coordenados. Assim, procuremos estabelecer estas condições.

Para isto, consideremos as faces oppostas *abcd* e *hgfe*. A primeira, supporta evidentemente, de cima para baixo, uma pressão proporcional a área do rectangulo $dxdy$; d'onde, a pressão será $pdxdy$. A segunda, soffre no mesmo sentido uma pressão medida pela quantidade

$$\left(p+\frac{dp}{dz}\,dz\right)dxdy.$$

Ora, a resistencia do fluido sobre o qual o parallelipipedo acha-se appoiado é uma força igual e dirigida em sentido contrario a essa pressão. Portanto, o parallelipipedo é impellido no sentido contrario ao do eixo dos z pelas duas forças contrarias: $pdxdy$ e

$$\left(p+\frac{dp}{dz}\,dz\right)dxdy;$$

d'onde, a resultante será a differença

$$\frac{dp}{dz}\,dxdydz;$$

e por ser $dm=\rho\,dxdydz$, a expressão precedente se mudará em

$$\frac{1}{\rho}\,dm\,\frac{dp}{dz}.$$

Para que o parallelipipedo fique em repouso será evidentemente preciso que a força

$$\frac{1}{\rho}\,dm\,\frac{dp}{dz}$$

seja destruida pela componente vertical *Zdm* da força que actúa em sentido opposto ; d'onde,

$$Zdm = \frac{1}{\rho} dm \frac{dp}{dz};$$

portanto,

$$\frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

Analogamente chegariamos a estabelecer as duas outras equações que traduziriam as leis do equilibrio d'uma molecula fluida qualquer. Assim, teremos as tres equações seguintes :

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \frac{dp}{dy} = \rho Y, \frac{dp}{dz} = \rho Z. \qquad (26)$$

Ellas nos traduzem que : *em cada ponto d'um systema fluido em equilibrio, as derivadas da pressão em relação ás coordenadas são iguaes ao producto da densidade pelas componentes respectivas da força acceleratriz.*

415. METHODO INDIRECTO. — De duas naturezas podem ser os fluidos mathematicamente considerados : como *incompressiveis* e como *elasticos*. Diz-se que um fluido é incompressivel *quando póde variar de fórma sem variar de volume:* os liquidos são sensivelmente julgados incompressiveis. Um systema fluido é chamado elastico, *quando o seu volume varia sob a acção d'uma força que o comprime;* de modo a retomar o seu primitivo volume quando as forças que o fazem variar cessam de agir: taes são os gazes.

Esta distincção fundamental nos leva a admittir dois casos geraes na applicação do methodo indirecto para o estabelecimento das leis da hydrostatica ; primeiro, o caso de fluidos incompressiveis ; segundo, o caso de fluidos elasticos.

PRIMEIRO CASO. — Seja a equação geral do equilibrio,

$$\Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0.$$

Designando por dm a massa d'uma qualquer das moleculas d'um systema fluido inteiramente livre, esta equação poderá ser escripta assim:

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm = 0, \qquad (27)$$

o signal Σ não podendo mais ter logar porque se trata d'uma somma de elementos differenciaes. O volume d'um elemento infinitamente pequeno dm do fluido podendo ser representado por $dxdydz$, teremos:

$$dm = \rho\, dx\, dy\, dz,$$

sendo ρ a densidade do fluido; d'onde, a equação (27) se tornará em

$$\int (\rho X\delta x + \rho Y\delta y + \rho Z\delta z)\, dx\, dy\, dz = 0. \qquad (28)$$

Em virtude da incompressibilidade do fluido, teremos a condição expressa pela equação seguinte:

$$dx\, dy\, dz = a,$$

sendo a uma constante; d'onde,

$$\delta\, (dx\, dy\, dz) = 0\,;$$

portanto,

$$\int \lambda\delta\, (dx\, dy\, dz) = 0.$$

Reunindo esta equação á equação (28), teremos a nossa equação geral do equilibrio:

$$\int (\rho X\delta x + \rho Y\delta y + \rho Z\delta z)\, dxdydz + \int \lambda\delta\, (dxdydz) = 0; \qquad (29)$$

mas, por ser

$$\delta\, (dxdydz) = (dydz\,\delta\, dx + dxdy\,\delta\, dz + dxdz\,\delta\, dy) =$$
$$= dx\, dy\, dz \left(\frac{d\,\delta\, x}{dx} + \frac{d\,\delta\, y}{dy} + \frac{d\,\delta\, z}{dz} \right),$$

teremos:

$$\left.\begin{aligned} &\int (\rho X \delta x + \rho Y \delta y + \rho Z \delta z) dx dy dz + \\ &+ \int \lambda dx dy dz \left(\frac{d \delta x}{dx} + \frac{d \delta y}{dy} + \frac{d \delta z}{dz} \right) = 0\,; \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

d'onde, por ser:

$$\int \lambda \frac{d \delta x}{dx} dx\, dy\, dz = \int dy\, dz \int \lambda \frac{d \delta x}{dx} dx = \int dy dz \lambda \delta x -$$

$$- \int dy dz \int \frac{d\lambda}{dx} \delta x dx,$$

$$\int \lambda \frac{d \delta y}{dy} dy\, dx\, dz = \int dx dz \int \lambda \frac{d \delta y}{dy} dy = \int dx dz \lambda \delta y -$$

$$- \int dx dz \int \frac{d\lambda}{dy} \delta y dy,$$

$$\int \lambda \frac{d \delta z}{dz} dz dx dy = \int dx\, dy \int \lambda \frac{d \delta z}{dz} dz = \int dx dy \lambda \delta z -$$

$$- \int dx dy \int \frac{d\lambda}{dz} \delta z dz.$$

teremos em logar da equação (30) a seguinte:

$$\int (\rho X \delta x + \rho Y \delta y + \rho Z \delta z) dx dy dz +$$

$$+ \int (dy dz \lambda \delta x + dx dz \lambda \delta y + dx dy\, \lambda \delta z + K) -$$

$$- \int \left(dx dy dz \frac{d\lambda}{dx} \delta x + dx dy dz \frac{d\lambda}{dy} \delta y + dx dy dz \frac{d\lambda}{dz} \delta z \right) = 0,$$

sendo K uma constante arbitraria; d'onde, resultará a equação:

$$\int \left[\left(\rho X - \frac{d\lambda}{dx} \right) \delta x + \left(\rho y - \frac{d\lambda}{dy} \right) \delta y + \left(\rho Z - \frac{d\lambda}{dz} \right) \delta z \right] dx\, dy\, dz +$$

$$+ \int (dy dz \lambda \delta x + dx dz \lambda \delta y + dx dy \lambda \delta z + K) = 0.$$

Para que esta equação tenha logar será preciso que tenhamos as equações seguintes:

$$\rho X = \frac{d\lambda}{dx},\ \rho Y = \frac{d\lambda}{dy},\ \rho Z = \frac{d\lambda}{dz}; \qquad (31)$$

e a *equação aos limites*:

$$dy dz \lambda \delta x + dx dz \lambda \delta y + dx dy \lambda \delta z + K = 0, \qquad (32)$$

As tres equações (31) são as equações geraes do equilibrio já conhecidas pelo methodo directo ; e a equação (32) não precisa ser considerada porque o systema fluido foi supposto inteiramente livre.

SEGUNDO CASO.— A somma dos momentos virtuaes das forças exteriormente applicadas a um qualquer systema fluido gazoso será, como precedentemente, expressa, por

$$\int (\rho X \delta x + \rho Y \delta y + \rho Z \delta z)\, dxdydz,$$

que é exactamente o primeiro membro da equação (28). Um fluido gazoso qualquer é sempre animado d'uma força interior que se chama *a sua elasticidade : é a força em virtude da qual o fluido tende a dilatar-se ou a augmentar seu volume*. Si ε designa a força elastica d'uma molecula qualquer dm, a somma algebrica dos momentos virtuaes relativos á elasticidade de toda a massa fluida, isto é, relativos á força que tende a augmentar o volume de cada particula dm, será representada por

$$-\int \varepsilon\, \delta\, (dxdydz),$$

porque a elasticidade ε deve ser considerada em sentido contrario ao das coordenadas (x, y, z). Assim, a nossa equação de equilibrio será :

$$\int(\rho X \delta x + \rho Y \delta y + \rho Z \delta z)\, dxdydz - \int \varepsilon \delta\, (dxdydz) = 0.$$

Esta equação, sendo inteiramente analoga á equação (29), pois só differe em ser

$$\lambda = - \varepsilon,$$

nos fornecerá as equações :

$$\rho X = - \frac{d\varepsilon}{dx}, \ \rho Y = - \frac{d\varepsilon}{dy}, \ \rho Z = - \frac{d\varepsilon}{dz},$$

para o equilibrio dos gazes.

116. CONSEQUENCIAS DAS EQUAÇÕES GERAES DO EQUILIBRIO DOS FLUIDOS. — Tudo o que nos resta dizer sobre o equilibrio dos fluidos incompressiveis são consequencias das equações geraes

$$\frac{dp}{dx} = \rho \, X, \frac{dp}{dy} = \rho Y, \frac{dp}{dz} = \rho \, Z. \tag{26}$$

Multiplicando a primeira por dx, a segunda por dy e a terceira por dz e sommando as equações resultantes, teremos:

$$\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = \rho \, (Xdx + Ydy + Zdz).$$

ou

$$dp = \rho \, (Xdx + Ydy + Zdz) \; ; \tag{33}$$

d'onde, a pressão

$$p = \int \rho \, (Xdx + Ydy + Zdz) + C.$$

Examinando esta equação vemos que o valor de p depende da integrabilidade de uma differencial total á tres variaveis. Ora, como sabemos do calculo integral, isto só será possivel quando tivermos as condições seguintes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d.\,\rho X}{dy} &= \frac{d.\,\rho Y}{dx}, \\ \frac{d.\,\rho X}{dz} &= \frac{d.\,\rho Z}{dx}, \\ \frac{d.\,\rho Y}{dz} &= \frac{d.\,\rho Z}{dy}, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Admittindo, pois, que a expressão differencial

$$\rho \, (Xdx + Ydy + Zdz)$$

seja uma differencial exacta, teremos :

$$p = \varphi (x, y, z) + C, \tag{35}$$

a constante C sendo determinada quando for conhecida a pressão em um certo ponto dado. Assim, as condições de equilibrio expressas pelas equações (26) são referidas algebricamente ás condições de integrabilidade expressas pelas equações (34).

Si, pois, as condições de integrabilidade são satisfeitas, a massa fluida considerada permanecerá em equilibrio; e a questão unica a resolver será a da determinação de sua figura exterior. Suppondo a massa fluida livre em sua superficie, a pressão supportada por todos os pontos d'esta superficie será evidentemente nulla; d'onde, a equação (33) dá-nos:

$$(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = 0 \, ; \qquad (36)$$

ou, chamando R a resultante das forças X, Y, Z,

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R}} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{R}} \cdot \frac{dz}{ds} = 0 \, ;$$

equação que nos mostra que *a resultante das forças X, Y, Z, deve ser normal á superficie livre do fluido e dirigida do exterior para o interior*. Suppondo o fluido homogeneo, ρ será uma constante; e tomando-a igual á unidade, a equação (36) se reduzirá á

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0 \, ;$$

d'onde,

$$\int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = \mathrm{C},$$

ou

$$f(x, y, z) = \mathrm{C}.$$

Tal é a equação que nos definirá a fórma da superficie exterior do fluido. Esta equação da superficie livre, é tambem a equação que convém a todas as superficies em cujos pontos a pressão e a densidade são constantes. Estas superficies gozarão todas da propriedade de ser normaes á

resultante das forças X, Y, Z e foram chamadas por Clairaut *superficies de nivel;* dando o nome de *camada de nivel* á massa fluida comprehendida entre duas superficies de nivel consecutivas.

Si o fluido é heterogeneo e a differencial

$$Xdx + Ydy + Zdz = dF(x, y, z)$$

a equação (33) será :

$$dp = \rho . dF(x, y, z);$$

d'onde

$$d. F(x, y, z) = \frac{dp}{\rho}. \quad (37$$

Examinando esta equação vê-se que

$$d. F(x, y, z)$$

sendo uma differencial exacta, $\frac{dp}{\rho}$ tambem deverá ser uma differencial exacta ; d'onde, a quantidade ρ só poderá depender da variavel p ; e, portanto,

$$\rho = f(p). \quad (38)$$

Imaginando que a variavel p varie por gráos insensiveis, isto é, que receba uma série de valores consecutivos, poderemos considerar a quantidade p como constante em cada um dos intervallos infinitesimaes. Assim, a equação (37) nos dará a equação

$$F(x, y, z) = C,$$

a qual convirá não só á superficie livre do fluido como tambem a uma infinidade de superficies de nivel.

Em todos os pontos de cada uma das camadas de nivel d'um liquido qualquer, em equilibrio, a pressão e a densidade serão, pois, constantes, podendo a densidade variar d'uma camada á seguinte.

Para os gazes, suppondo a temperatura constante em toda a massa fluida e fazendo abstracção d'outros modificadores, a experiencia nos ensina que a pressão é proporcional á densidade, isto é, que:

$$p = k.\rho, \tag{39}$$

k sendo a pressão exercida sobre a unidade de densidade do gaz.

Da equação (39) tirando-se o valor de ρ e substituindo-o na equação

$$dp = \rho\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

teremos:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz}{k}; \tag{40}$$

d'onde, integrando, ter-se-ha:

$$l.\,p = \int \frac{\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz}{k} + l.\,\mathrm{C}.$$

Por ser a temperatura supposta constante em toda a massa fluida, k será constante; d'onde,

$$l.\,p = \frac{1}{k}\int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) + l.\mathrm{C};$$

ou, designando por e a base neperiana,

$$l.\,p = \left[\frac{1}{k}.\int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)\right] l.\,e + l.\,\mathrm{C},$$

ou

$$l.p = l.\,e^{\frac{1}{k}.\int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)} + l.\,\mathrm{C};$$

ou,

$$l.\,p = l.\,\mathrm{C}e^{\frac{1}{k}\int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)};$$

d'onde,

$$p = \mathrm{C}e^{\frac{1}{k}\int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)}.$$

Substituindo este valor na equação (39), vem :

$$\rho = \frac{C}{k} \cdot e^{\frac{1}{k}\int (Xdx + Ydy + Zdz)}$$

Tal é o valor da densidade de uma camada de nivel do fluido, na hypothese de uma temperatura constante. Quando a temperatura não é uniforme em toda a massa fluida e a differencial

$$Xdx + Ydy + Zdz = d.\, F(x, y, z),$$

a equação (40) será :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d.\, F(x, y, z)}{k}. \qquad (41)$$

Examinando esta equação vemos que a variavel k depende da quantidade

$$F(x, y, z);$$

e como p, em virtude da equação (39), depende de k, é claro que a pressão p tambem ficará dependendo da quantidade

$$F(x, y, z).$$

Designando esta quantidade simplesmente por F, poderemos escrever, pois, a equação

$$p = F_1(F). \qquad (42)$$

Imaginando que a quantidade F varie por gráos insensiveis, é claro que poderemos considerar a quantidade F como constante em cada um dos intervallos infinitesimaes. Assim, a equação (41) nos dará as duas equações seguintes :

$$d.\, F(x, y, z) = 0,\ dp = 0;$$

d'onde,

$$F(x, y, z) = C;$$

portanto, $p =$ const.

A primeira d'estas equações definirá a superficie livre do fluido e convirá tambem a todas as superficies de nivel do mesmo fluido; a segunda nos mostra que em todos os pontos de uma mesma superficie de nivel a pressão é constante. Logo, em virtude da equação (39), si p é uma quantidade constante para cada uma das superficies de nivel, k e ρ serão necessariamente constantes para todos os pontos da mesma superficie, mas sempre variarão de uma superficie á seguinte.

Fica assim concluido o estudo das leis geraes do equilibrio dos fluidos.

HYDRODYNAMICA

417. Conhecidas as equações geraes que traduzem as leis da hydrostatica, D'Alembert, em 1752, deu no *Ensaio de uma theoria sobre a resistencia dos fluidos* as equações geraes da hydrodynamica; mas, é ainda a Leonardo Euler que devemos as equações do movimento dos fluidos *sob a fórma mais simples e luminosa das differenças parciaes*.

Para as conhecermos, sejam (x, y, z) as coordenadas rectangulas de uma molecula qualquer dm de um systema fluido em movimento. Representemos por X, Y, Z as componentes segundo os eixos coordenados das forças acceleratrizes que actúam sobre a molecula dm; e sejam (u, v, w) as velocidades, no fim do tempo t, d'esta mesma molecula, no sentido dos eixos coordenados.

Sejam, finalmente, ρ a densidade da molecula dm, no fim do tempo t, e p a pressão referida á unidade de superficie, que supporta a molecula considerada, no fim do tempo t.

As componentes das forças a que são effectivamente devidos os movimentos da molecula dm serão:

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt};$$

sendo, conforme suppozemos,

$$u = \frac{dx}{dt}, \ v = \frac{dy}{dt}, \ w = \frac{dz}{dt}; \qquad (43)$$

e como X, Y, Z são as componentes das forças acceleratrizes primitivamente impressas á mesma molecula dm, teremos, para as expressões das forças perdidas, em cada instante dt, no sentido dos eixos, as differenças

$$X - \frac{du}{dt}, \ Y - \frac{dv}{dt}, \ Z - \frac{dw}{dt}.$$

Em virtude do principio de d'Alembert, e servindo-nos das equações geraes da hydrostatica, teremos :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho\left(X - \frac{du}{dt}\right), \\ \frac{dp}{dy} &= \rho\left(Y - \frac{dv}{dt}\right), \\ \frac{dp}{dz} &= \rho\left(Z - \frac{dw}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Taes são as equações geraes da hydrodynamica.

418. As differenciaes (du, dv, dw) designam os accrescimos que as velocidades (u, v, w) recebem durante o tempo dt; e como estas velocidades variam continuamente com o tempo t e com as coordenadas (x, y, z), teremos:

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

$$dv = \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz,$$

$$dw = \frac{dw}{dt}dt + \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz,$$

e substituindo n'estas equações os valores de (dx, dy, dz), facilmente deductiveis das equações (43), resultarão as equações seguintes:

$$du = \frac{du}{dt}\, dt + \frac{du}{dx} \,.\, udt + \frac{du}{dy} \,.\, vdt + \frac{du}{dz} \,.\, wdt,$$

$$dv = \frac{dv}{dt}\, dt + \frac{dv}{dx} \,.\, udt + \frac{dv}{dy} \,.\, vdt + \frac{dv}{dz} \,.\, wdt,$$

$$dw = \frac{dw}{dt}\, dt + \frac{dw}{dv} \,.\, udt + \frac{dw}{dy} \,.\, vdt + \frac{dw}{dz} \,.\, wdt;$$

d'onde, as equações (44) se mudarão nas seguintes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho\left(X - \frac{du}{dt} - u\,\frac{du}{dx} - v\,\frac{du}{dy} - w\,\frac{du}{dz}\right), \\ \frac{dp}{dy} &= \rho\left(Y - \frac{dv}{dt} - u\,\frac{dv}{dx} - v\,\frac{dv}{dy} - w\,\frac{dv}{dz}\right), \\ \frac{dp}{dz} &= \rho\left(Z - \frac{dw}{dt} - u\,\frac{dw}{dx} - v\,\frac{dw}{dy} - w\,\frac{dw}{dz}\right). \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

419. Estas equações não sendo sufficientes para determinar completamente o movimento dos fluidos, vamos estabelecer uma quarta equação. A massa fluida considerada sendo *permanentemente continua* durante o movimento, procuremos exprimir algebricamente a *condição de continuidade*.

Para isto, consideremos o parallelipipedo rectangulo de massa fluida cujas dimensões infinitesimaes são (dx, dy, dz). A massa fluida contida n'este parallelipipedo será expressa, no fim do tempo t, pela quantidade

$$\rho\, dxdydz;$$

e no fim do tempo dt a mesma massa terá recebido um accrescimo

$$\frac{d\rho}{dt}\, dt.\, dxdydz; \qquad \text{(A)}$$

d'onde a massa fluida do parallelipipedo considerado será no fim do tempo $(t + dt)$ medida pela quantidade

$$\left(\rho + \frac{d\rho}{dt}\, dt\right) dxdydz.$$

Para que não haja solução de continuidade na massa fluida do parallelipipedo será bastante que o accrescimo

$$\frac{d\rho}{dt}\, dtdxdydz,$$

seja igual á differença entre a massa do fluido que no tempo dt introduz-se no parallelipipedo por tres faces contiguas e a massa do fluido que, no mesmo tempo dt, sahe pelas tres faces respectivamente oppostas. Ora, a massa do fluido que no tempo dt entra pelas faces $dydz$, $dxdz$, $dxdy$ é medida por

$$dydz.\ \rho \frac{dx}{dt}\, dt + dxdz.\ \rho \frac{dy}{dt}\, dt + dxdy.\ \rho \frac{dz}{dt}\, dt;$$

ou, o que é a mesma cousa, pela quantidade

$$dydz.\ \rho\, udt + dxdz.\ \rho\, vdt + dxdy.\ \rho\, wdt; \qquad \text{(B)}$$

e a massa do fluido que no tempo dt sahe pelas faces respectivamente oppostas ás faces consideradas é expressa por

$$\left(dydz\ \rho\ udt + dydzdt\, \frac{d\,\rho\, u}{dx}\, dx\right) + \left(dxdz\ \rho\ vdt + dxdzdt\, \frac{d\,\rho\, v}{dy}\, dy\right) + \\ + \left(dxdy\ \rho\ wdt + dxdydt\, \frac{d\,\rho\, w}{dz}\, dz\right);$$

ou, o que é o mesmo, por

$$\left.\begin{aligned} dydz\left(\rho\ u + \frac{d.\,\rho\, u}{dx}\, dx\right) dt + dxdz\left(\rho\ u + \frac{d\,\rho\, v}{dy}\, dy\right) dt + \\ + dxdy\left(\rho\ w + \frac{d.\,\rho\, w}{dz}\, dz\right) dt. \end{aligned}\right\} \quad \text{(C)}$$

Tomando, pois, a differença entre as quantidades (B) e (C), teremos:

$$-\,dxdydz\left(\frac{d\,\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}\right)dt;$$

e como esta quantidade deve ser igual á quantidade (A), teremos:

$$\frac{d\,\rho}{dt}+\frac{d.\,\rho\,u}{dx}+\frac{d.\,\rho\,v}{dy}+\frac{d.\,\rho\,w}{dz}=0, \tag{46}$$

que é a equação conhecida por *equação de continuidade.*

420. No caso em que o fluido é elastico, suppondo a temperatura constante para toda a massa fluida e fazendo abstracção d'outros modificadores, teremos a quinta equação

$$p=k\,\rho. \tag{47}$$

No caso em que o fluido é incompressivel e homogeneo, a densidade ρ será constante e não dependerá do tempo nem da posição do ponto ; portanto, ρ = constante.

Assim, a equação (46) se reduzirá simplesmente á fórma seguinte:

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0. \tag{48}$$

Quando o fluido é incompressivel e não homogeneo, a densidade ρ não será constante e variará com o tempo e com as coordenadas que definem a posição de cada ponto ; d'onde, a equação (48) devendo ter logar por causa da incompressibilidade do fluido, será evidentemente preciso que a equação (46) se decomponha nas duas equações seguintes:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,\\ \frac{d\rho}{dt}+u\,\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}=0.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

D'est'arte, vê-se que logicamente o problema geral da hydrodynamica fica plenamente resolvido. O conjuncto das equações que acabamos de estabelecer será sufficiente para

a determinação das tres velocidades, da densidade e da pressão em cada ponto fluido; mas, infelizmente, a integração d'essas equações só tem sido possivel para casos muito particulares.

Assim, damos por concluido o estudo do movimento dos systemas variaveis.

CAPITULO III

PROPRIEDADES GERAES DO MOVIMENTO

---

421. Leonardo Euler, em 1758, definindo a noção *centro de massa*, assim se exprime: «Quando o corpo acha-se na superficie da terra, este ponto é exactamente o mesmo que se chama o seu centro de gravidade; mas, quando o corpo não se achasse em nenhuma ligação com a terra, ou não fosse sujeito á acção da gravidade, este ponto não lhe seria menos essencial e entraria igualmente na determinação de seus movimentos. Logo, pois, que este ponto é absolutamente independente da gravidade e que é determinado unicamente pela distribuição da materia de que o corpo é composto, eu o chamarei antes o *centro de massa*, ou o *centro de inercia* de cada corpo». Ora, tendo de estabelecer as *propriedades geraes* do movimento, propriedades communs a todos os systemas materiaes, solidos ou fluidos, quer estejam ou não na superficie da terra, a expressão *centro de gravidade* certamente restringiria a generalidade de taes propriedades. Assim, eis justificada a razão de preferencia que damos á noção *centro de massa*.

Tres são as propriedades do movimento. As duas primeiras são geraes, para todos os systemas; a terceira é relativa a certos systemas particulares.

422. PRIMEIRO THEOREMA GERAL.— *Theorema sobre o movimento do centro de massa.*— Si nas equações (C) do artigo (399),

$$\Sigma X = M \frac{d^2x_1}{dt^2}, \ \Sigma Y = M \frac{d^2y_1}{dt^2}, \ \Sigma Z = M \frac{d^2z_1}{dt^2}, \qquad (1)$$

que definem a translação d'um systema invariavel livre e qualquer, as variaveis (x_1, y_1, z_1) se referem ao centro de massa do systema; si M é esta massa e ΣX, ΣY, ΣZ designam, em cada instante, as componentes das forças exteriores transportadas para o centro de massa: é claro que a translação do systema considerado nos offerece a propriedade geral seguinte: *em todo systema livre em movimento o centro de massa move-se como si toda a massa do systema fosse n'elle concentrada, e que todas as forças exteriores fossem para esse ponto transportadas parallelamente a si mesmas.*

423. Corollarios.— Quando o systema não soffre a acção de forças exteriores e fica submettido exclusivamente ás forças que provêm das acções mutuas de suas partes, isto é, quando

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

as equações (1) nos darão:

$$M \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0;$$

d'onde,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} dt = 0, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} dt = 0, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} dt = 0;$$

e integrando, teremos:

$$\frac{dx_1}{dt} = a, \quad \frac{dy_1}{dt} = b, \quad \frac{dz_1}{dt} = c. \qquad (2)$$

Si ainda $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, isto é, si além da ausencia de forças exteriores, ha tambem ausencia de impulsão primitiva, teremos:

$$dx_1 = 0, \quad dy_1 = 0, \quad dz_1 = 0;$$

d'onde, integrando,

$$x_1 = a_1, \quad y_1 = b_1 \quad z_1 = c_1;$$

isto é, que *o centro de massa do systema permanecerá constantemente immovel e ficará fixo.*

Si uma impulsão primitiva tivesse logar, as velocidades a, b, c não seriam nullas. N'este caso, as equações (2) nos darão:

$$dx_1 = adt, \quad dy_1 = bdt, \quad dz_1 = cdt\,;$$

d'onde, integrando,

$$x_1 = at + a_1, \; y_1 = bt + b_1, \quad z_1 = ct + c_1\,; \tag{3}$$

e pela eliminação de t resulta:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - a_1 &= \frac{a}{c}\,(z_1 - c_1), \\ y_1 - b_1 &= \frac{b}{c}\,(z_1 - c_1)\,; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e as equações (3) e (4) nos mostram que *o centro de massa do systema move-se uniformemente e em linha recta.*

424. Quando dois ou muitos corpos do systema experimentam um choque durante o movimento, a velocidade do centro de massa do systema fica constantemente a mesma. Para demonstrarmos, retomemos as equações

$$x_1 = \frac{\Sigma\,(mx)}{\Sigma\,(m)}, \; y_1 = \frac{\Sigma\,(my)}{\Sigma\,(m)}, \; z_1 = \frac{\Sigma\,(mz)}{\Sigma\,(m)}\,;$$

por ser $M = \Sigma(m)$, teremos :

$$Mx_1 = \Sigma\,(mx), \; My_1 = \Sigma\,(my), \; Mz_1 = \Sigma\,(mz)\,;$$

e differenciando estas equações em relação a t, resultarão as equações seguintes :

$$M\,\frac{dx_1}{dt} = \Sigma\, m\,\frac{dx}{dt}, \, M\,\frac{dy_1}{dt} = \Sigma\, m\,\frac{dy}{dt}, \; M\,\frac{dz_1}{dt} = \Sigma\, m\,\frac{dz}{dt}. \tag{5}$$

Sejam $(a, a', a''$, etc) e $(A, A', A''$, etc.); $(b, b', b''$, etc.) e $(B, B', B''$, etc.); $(c, c', c''$, etc.) e $(C, C', C''$, etc.), as velocidades, respectivamente avaliadas segundo os eixos coorde-

nados, dos pontos que constituem o systema, antes e no fim do choque. Substituindo estes valores nas equações (5), teremos : antes do choque

$$M \frac{dx_1}{dt} = \Sigma\, ma,\ M \frac{dy_1}{dt} = \Sigma\, mb,\ M \frac{dz_1}{dt} = \Sigma\, mc\,;$$

depois do choque

$$M \frac{dx_1}{dt} = \Sigma\, mA,\ M \frac{dy_1}{dt} = \Sigma\, mB,\ M \frac{dz_1}{dt} = \Sigma\, mC\,;$$

d'onde as quantidades de movimento perdidas no instante do choque serão, no sentido dos eixos coordenados, expressas por

$$\Sigma\, ma - \Sigma\, mA,\ \Sigma\, mb - \Sigma\, mB,\ \Sigma\, mc - \Sigma\, mC\,;$$

e como devem ser nullas estas quantidades de movimento, resultará que :

$$\Sigma\, ma = \Sigma\, mA,\ \Sigma\, mb = \Sigma\, mB,\ \Sigma\, mc = \Sigma\, mC\,;$$

isto é, que *as velocidades*

$$\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dy_1}{dt},\ \frac{dz_1}{dt}$$

do centro de massa não experimentam nenhuma alteração pelo effeito do choque.

Esta proposição teria logar mesmo quando o systema em movimento soffresse bruscamente uma explosão interior, determinada por uma circumstancia qualquer : *a velocidade do centro de massa de todas as partes do systema, depois da explosão, seria exactamente a mesma que a velocidade do systema antes da explosão.*

As consequencias que tiramos da propriedade geral do movimento do centro de massa são conhecidas por *leis da conservação do centro de massa.*

425. A propriedade do movimento do centro de massa tem logar não só para os corpos inanimados, como para os

corpos vivos. *Todo organismo animado, como toda machina inorganica, é directamente incapaz de deslocar seu centro de gravidade por esforços puramente interiores; quaesquer que fossem estes esforços, elles se limitariam a mudar a figura do systema, si o exterior não interviesse passivamente.* (A. Comte.) E' assim que um animal qualquer póde elevar ou abaixar verticalmente o seu centro de gravidade, apoiando-se sobre o sólo; póde caminhar horizontalmente, por meio do attrito contra a superficie da terra; mas não póde ter locomoção sobre um plano perfeitamente polido, contra o qual a resistencia do attrito seja diminuta.

426. A propriedade do movimento do centro de massa devida a Newton e a D'Alembert, nos permitte ainda a consideração de um corollario, conhecido por *theorema das quantidades de movimento projectadas.*

Seja a primeira das equações (1) do centro de massa

$$\Sigma X = M \frac{d^2x_1}{dt^2}.$$

Como a translação do centro de massa d'um systema é commum a todos os pontos materiaes do mesmo systema, podemos substituir a equação precedente pela seguinte:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X;$$

d'onde, multiplicando por dt, teremos:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} dt = \Sigma X\, dt,$$

ou

$$\Sigma m\, d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma X\, dt,$$

ou, designando por v a velocidade $\frac{dx}{dt}$,

$$\Sigma m\, d\, v_x = \Sigma X\, dt.$$

Integrando, temos:

$$\Sigma m v_{1x} - \Sigma m v_{0x} = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} X dt.$$

Por ser X a componente segundo o eixo dos x da força exterior que actua sobre o ponto m e o valor d'esta componente sendo exactamente o da projecção d'essa força sobre o mesmo eixo, nós a representaremos por F_x. D'onde,

$$\Sigma m v_{1x} - \Sigma m v_{0x} = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} F_x dt,$$

isto é, que *o accrescimo da somma das quantidades de movimento projectadas sobre um eixo qualquer, durante um certo tempo, é igual á somma das impulsões das forças exteriores projectadas sobre o mesmo eixo, as impulsões sendo tomadas durante o mesmo tempo.*

Este theorema geral da mecanica é uma consequencia da propriedade geral relativa ao centro de massa, porque as velocidades v_1x e v_0x são as mesmas que as do centro de massa do systema considerado e as forças F_x são forças exteriores ao mesmo systema.

427. SEGUNDO THEOREMA GERAL. *Theorema das áreas.* No estudo das *forças centraes*, que fizemos (356), chegámos a estabelecer a conclusão seguinte: *o raio vector que une uma molecula a um fóco descreve áreas sempre proporcionaes aos tempos, quaesquer que sejam a lei da força e a natureza da trajectoria.* Tal é o notavel principio achado pelo genio de Kepler em uma época em que Galileo ainda não tinha creado a dynamica. [1]

428. Reciprocamente, quando o principio de Kepler tem logar, a força que solicita o movel será constantemente dirigida para um centro fixo. A demonstração d'esta reciproca tambem já foi dada no estudo das forças centraes e acha-se no artigo (377).

---

[1] Pierre Laffitte falsamente attribue a A. Comte um erro historico sobre o *principio de Kepler*, Vide a pag. 28 do tomo 2º do *Cours de Philosophie Première.*

429. *Caso geral do theorema das áreas.* Si nas equações geraes do movimento de rotação de um systema invariavel em torno do seu centro de massa, equações (D) e (E) dadas no artigo (400),

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\,(Xy - Yx) &= \Sigma\, m\left(y\,\frac{d^2x}{dt^2} - x\,\frac{d^2y}{dt^2}\right), \\ \Sigma\,(Zx - Xz) &= \Sigma\, m\left(x\,\frac{d^2z}{dt^2} - z\,\frac{d^2x}{dt^2}\right), \\ \Sigma\,(Yz - Zy) &= \Sigma\, m\left(z\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2z}{dt^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

os primeiros membros são nullos, ellas se reduzirão ás seguintes:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, m\left(y\,\frac{d^2x}{dt^2} - x\,\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= 0, \\ \Sigma\, m\left(x\,\frac{d^2z}{dt^2} - z\,\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= 0, \\ \Sigma\, m\left(z\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Em tres casos unicos isto poderá acontecer: 1°, quando o systema não soffre a acção de nenhuma força acceleratriz; 2°, quando as forças acceleratrizes são constantemente dirigidas para a origem das coordenadas; 3°, finalmente, quando os pontos materiaes do systema são unicamente submettidos a forças que provêm de suas acções reciprocas, tanto bruscas como continuas.

430. Primeiro caso.— Não havendo forças acceleratrizes, o movimento do systema só poderá ter logar em virtude de uma impulsão unica. Assim, teriamos:

$$Z = 0, Y = 0,\ Z = 0;\ X' = 0,\ Y' = 0,\ Z' = 0\ ;\ \text{etc.}$$

e seriam nullos os primeiros membros das equações (6).

431. Segundo caso.— Quando as forças acceleratrizes que solicitam os pontos do systema são constantemente dirigidas para a origem das coordenadas, as componentes

(X, Y, Z), (X', Y', Z'), etc., das forças applicadas aos pontos m, m', m'', etc., estarão entre si como as coordenadas rectangulas d'estes mesmos pontos ; d' onde,

$$\Sigma Xy = \Sigma Yx, \ \Sigma Zx = \Sigma Xz, \ \Sigma Yz = \Sigma Zy \ ;$$

e serão nullos os primeiros membros das equações (6).

432. TERCEIRO CASO.— Quando os pontos materiaes do systema são submettidos ás suas acções mutuas, quaesquer que ellas sejam, são nullos os primeiros membros das equações (6). Para o provarmos, seja R a força que provém da acção mutua dos pontos m e m' do systema considerado.

Designando por r a distancia d'estes dois pontos, os cosenos dos angulos que a recta que passa pelos pontos m e m' faz respectivamente com parallelas aos eixos coordenados, serão :

$$\frac{x' - x}{r}, \ \frac{y' - y}{r}, \ \frac{z' - z}{r},$$

si (x, y, z) e (x', y', z') representam as coordenadas dos pontos m e m' ; mas, por serem reciprocas as acções de m e m', teremos :

$$X = R. \frac{x' - x}{r}, \quad Y = R. \frac{y' - y}{r}, \quad Z = R. \frac{z' - z}{r} ;$$

$$X' = R. \frac{x - x'}{r}, \quad Y' - R. \frac{y - y'}{r}, \quad Z' - R. \frac{z - z'}{r} ;$$

d'onde, substituindo estes valores nas expressões

$$(Xy - Yx) + (X'y' - Y'x'), (Zx - Xz) + (Z'x' - X'z'),$$

$$(Yz - Zy) + (Y'z' - Z'y'),$$

ellas se reduzirão a zero ; portanto, os termos que resultam da acção mutua dos pontos do systema destroem-se dois a dois nos primeiros membros das equações (6), qualquer que seja a posição da origem das coordenadas.

Assim, as equações (7) terão necessariamente logar em qualquer dos tres casos que acabamos de considerar.

433. Para comprehendermos a significação dynamica das equações (7), observemos que ellas podem ser escriptas da fórma seguinte:

$$\Sigma m \frac{(yd^2x - xd^2y)}{dt^2} = 0, \Sigma m \frac{(xd^2z - zd^2x)}{dt^2} = 0,$$

$$\Sigma m \frac{(zd^2y - yd^2z)}{dt^2} = 0;$$

d'onde, por serem differenciaes exactas as quantidades entre parenthesis, teremos:

$$\Sigma m \frac{d\,(ydx - xdy)}{dt^2} = 0, \Sigma m \frac{d\,(xdz - zdx)}{dt^2} = 0,$$

$$\Sigma m \frac{d\,(zdy - ydz)}{dt^2} = 0;$$

d'onde, multiplicando estas equações por dt e integrando-as, vem:

$$\Sigma m \frac{(ydx - xdy)}{dt} = \text{A}, \Sigma m \frac{(xdz - zdx)}{dt} = \text{B},$$

$$\Sigma m \frac{(zdy - ydz)}{dt} = \text{C};$$

uo o que é a mesma cousa,

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m\,(ydx - xdy) &= \text{A}dt, \\ \Sigma m\,(xdz - zdx) &= \text{B}dt, \\ \Sigma m\,(zdy - ydz) &= \text{C}dt. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Examinando os primeiros membros d'estas equações vemos que $(ydx - xdy)$ é o dobro da área descripta durante o tempo dt, ou o dobro da differencial da área descripta, durante o tempo t, pelo raio vector da projecção d'uma molecula do systema, sobre o plano dos xy, a contar dos eixos dos y positivos para o eixo dos x positivos; do mesmo

modo vemos que $(xdz - zdx)$ é o dobro da differencial da área descripta durante o tempo t pelo raio vector da projecção da mesma molecula do systema, sobre o plano dos xz, a contar do eixo dos x positivos para o eixo dos z positivos; e, finalmente, vemos que $(zdy - ydz)$ é o dobro da differencial da área descripta durante o tempo t pelo raio vector da projecção da molecula do systema, sobre o plano dos zy, a partir do eixo dos z positivos para o eixo dos y positivos.

Considerando que as áreas sejam positivas ou negativas, conforme sejam traçadas sobre cada um dos tres planos coordenados no sentido indicado ou em sentido contrario, seja λ a somma das áreas descriptas, no tempo t, pelos raios vectores das projecções de todas as moleculas do systema sobre o plano dos xy, áreas multiplicadas pelas massas respectivas das mesmas moleculas. Analogamente, seja λ' a somma das áreas descriptas, no mesmo tempo t, pelos raios vectores das projecções de todos os pontos do systema, sobre o plano dos xz, áreas respectivamente multiplicadas pelas massas das mesmas moleculas; finalmente, seja λ'' a somma das áreas descriptas, durante o tempo t, pelos raios vectores das projecções dos pontos do systema, sobre o plano dos zy, áreas respectivamente multiplicadas pelas massas dos mesmos pontos. D'onde as relações seguintes:

$$\lambda = \int \frac{1}{2} \Sigma\, m\,(ydx - xdy),\quad \lambda' = \int \frac{1}{2} \Sigma\, m\,(xdz - zdx),$$

$$\lambda'' = \int \frac{1}{2} \Sigma\, m\,(zdy - ydz);$$

d'onde, em vista das equações (A), teremos:

$$\lambda = \int \frac{1}{2} \mathrm{A}dt,\quad \lambda' = \int \frac{1}{2} \mathrm{B}dt,\quad \lambda'' = \int \frac{1}{2} \mathrm{C}dt;$$

d'onde, finalmente,

$$\lambda = \frac{1}{2} \mathrm{A}t,\quad \lambda' = \frac{1}{2} \mathrm{B}t,\quad \lambda'' = \frac{1}{2} \mathrm{C}t,$$

sendo nullas as constantes arbitrarias, porque o tempo começa com as áreas.

As equações (B), traduzidas em linguagem vulgar, significam que : *quando um systema material de fórma qualquer e inteiramente livre não soffre a acção de forças exteriores, a somma algebrica dos productos da massa de cada ponto pela área que o seu raio vector descreve em torno d'um mesmo fóco, sobre um mesmo plano de projecção traçado pelo fóco, é sempre proporcional ao tempo.*

Tal é em que consiste o bello theorema das áreas, descoberto em 1747 por D'Arcy, theorema que abrange o principio de Kepler como um simples caso particular.

434. Emana do theorema de D'Arcy que : *si se fórma em uma época qualquer do movimento d'um systema a somma dos productos da massa de cada ponto material pelas áreas descriptas em torno d'um fóco e em um tempo dado, sobre um plano fixo qualquer, traçado pelo fóco, pelas projecções de seus raios vectores, ella será sempre invariavel.*

Com effeito, das equações (B) conclue-se que, em um tempo dado,

$$\lambda = const., \lambda' = const., \lambda'' = const.$$

Si concebermos a massa do systema decomposta em moleculas iguaes entre si e imaginarmos que da origem fixa das coórdenadas seja traçado um raio vector a cada molecula, a conclusão precedente poderá ser formulada assim : *a somma das áreas descriptas em torno d'um fóco e em um tempo dado pelas projecções dos raios vectores sobre um plano fixo qualquer traçado pelo fóco, deve conservar sempre um valor constante.* Esta lei chama-se a da *conservação das áreas.*

435. Voltando a considerar as equações (A), poderemos escrevel-as assim :

$$\Sigma m\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = A, \quad \Sigma m\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right) = B,$$

$$\Sigma m\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right) = C.$$

Estas equações, que nos permittiram estabelecer o theorema de D'Arcy, nos conduzem tambem ao enunciado seguinte: *no movimento de muitos corpos em torno d'um centro fixo, a somma dos productos da massa de cada ponto por sua velocidade de circulação em torno do centro e por sua distancia ao mesmo centro é sempre independente da acção mutua que os corpos podem exercer uns sobre os outros e se conserva a mesma quando não ha acção nem obstaculo exterior.*

Com effeito, tomemos a primeira das equações precedentes,

$$\Sigma\, m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = \mathrm{A}.$$

Por ser (356)

$$y\, dx - x\, dy = \rho^2\, d\theta,$$

teremos:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt} \cdot \rho \,.$$

Mas, $\rho\, d\theta$ é a medida do arco infinitamente pequeno descripto pelo raio vector ρ; d'onde,

$$v = \rho \frac{d\theta}{dt};$$

portanto, resultará:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = v \,.\, \rho.$$

Logo, teremos:

$$\Sigma\, m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = \Sigma\, m\, v \,.\, \rho.$$

D'onde,

$$\Sigma\, m\, v\, \rho = \mathrm{A},$$

como queriamos provar. Tal é em que consiste o principio estabelecido em 1746 por Leonardo Euler e Daniel Bernouilli.

436. Usualmente, o theorema de Euler e Daniel Bernouilli é conhecido por *theorema dos momentos das quantidades de movimento* e concebido n'estes termos: *no movimento d'um systema inteiramente livre, no qual os moveis são unicamente submettidos a suas acções mutuas, ou a forças dirigidas para um centro fixo, os momentos das quantidades de movimento de todos os pontos do systema, em relação a tres eixos rectangulares que se cortam n'este centro, são quantidades constantes.*

De facto, a ultima equação a que chegamos,

$$\Sigma m v \rho = A,$$

nos permitte escrever, com mais clareza, as equações seguintes:

$$\Sigma \left[(mv).\rho\right]_z = A, \ \Sigma \left[(mv).\rho\right]_y = B,$$

$$\Sigma \left[(mv).\rho\right]_x = C,$$

relativas aos tres eixos coordenados. D'onde, observa Laplace, *a somma dos momentos sendo nulla no caso do equilibrio de um systema, é constante no caso do movimento do mesmo systema.*

437. O theorema dos momentos das quantidades de movimento, nos casos em que não são nullos os primeiros membros da equação (6), consiste exactamente em que:

O accrescimo da somma dos momentos das quantidades de movimento em relação a um eixo qualquer durante um certo tempo é igual á integral tomada durante o mesmo intervallo de tempo do momento total das impulsões elementares das forças exteriores relativamente ao mesmo eixo.

Para demonstrarmos, seja a primeira das equações (6),

$$\Sigma (Xy - Yx) = \Sigma m \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right).$$

Por ser o primeiro membro d'esta equação a expressão da somma dos momentos das forças exteriores em relação ao eixo dos z, designemos esta somma por $\Sigma M_z F$. Resultará a equação seguinte:

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \Sigma M_z F;$$

d'onde, multiplicando-a, por dt e integrando entre os limites t_0 e t_1, correspondentes ás velocidades v_0 e v_1, teremos :

$$\Sigma m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma M_z F dt,$$

ou

$$\Sigma M_z m v_1 - \Sigma M_z m v_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma M_z F dt,$$

como queriamos demonstrar.

438. PLANO INVARIAVEL.— As áreas descriptas em um tempo dado pelas projecções dos raios vectores de todas as moleculas do systema considerado, sobre cada um dos planos coordenados, são exactamente as projecções sobre estes planos das áreas que no espaço descrevem, no mesmo tempo, estes mesmos raios. Analogamente, as áreas descriptas em um tempo dado pelas projecções dos raios vectores de todas as moleculas do systema considerado sobre cada um dos planos coordenados, respectivamente multiplicadas por suas massas, são exactamente as projecções, sobre estes planos, das áreas que no espaço descrevem, no mesmo tempo, estes mesmos raios, áreas respectivamente multiplicadas pelas mesmas massas.

D'onde, as quantidades λ, λ', λ'', já conhecidas, representarão tambem as sommas das projecções sobre tres planos coordenados, das áreas que no espaço descrevem, em um tempo dado, os raios vectores de todas as moleculas do systema considerado, áreas respectivamente multiplicadas pelas massas das mesmas moleculas.

Isto posto, vamos *determinar um plano tal que a somma dos productos das massas pelas áreas que descrevem as projecções de seus raios vectores sobre este plano seja um maximum.*

Para isto, consideremos a molecula m do systema. O seu raio vector Om descreve em torno do ponto O uma superficie conica. Seja (fig. 135) mOn um elemento infinitesimal d'esta superficie representada por $d\sigma$ e sejam (α, β, γ) os angulos que a recta OD, perpendicular ao plano d'este elemento, faz, respectivamente, com os eixos Ox, Oy, Oz. Projectemos Om sobre um plano qualquer P e seja ω a área descripta por esta projecção Op. Sejam $(\alpha', \beta', \gamma')$ os angulos que a recta OE, perpendicular ao plano P, faz, respectivamente, com os eixos coordenados. Designemos por θ o angulo DOE. Resultará:

$$d\,\omega = d\,\sigma \cos\theta$$

por ser $d\omega$ a projecção de $d\sigma$.

Si agora projectarmos a área $d\sigma$ sobre cada um dos tres planos coordenados e attendermos aos valores de λ, λ', λ'', já conhecidos, poderemos representar as respectivas projecções de $d\sigma$ por

$$\frac{d\lambda}{\Sigma m}, \quad \frac{d\lambda'}{\Sigma m}, \quad \frac{d\lambda''}{\Sigma m};$$

d'onde,

$$\frac{d\,\lambda''}{\Sigma m} = d\,\sigma \cos\alpha, \quad \frac{d\lambda'}{\Sigma m} = d\,\sigma \cos\beta, \quad \frac{d\,\lambda}{\Sigma m} = d\,\sigma \cos\gamma.$$

e tambem

$$\cos\theta = \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma'.$$

Multiplicando esta ultima equação por $d\sigma$, teremos:

$$d\,\sigma\cos\theta = d\,\sigma\cos\alpha.\cos\alpha' + d\,\sigma.\cos\beta.\cos\beta' + d\,\sigma\cos\gamma.\cos\gamma';$$

d'onde, attendendo ás equações precedentemente estabelecidas, resulta:

$$d\,\omega = \frac{d\lambda''}{\Sigma m}\cos\alpha' + \frac{d\lambda'}{\Sigma m}\cos\beta' + \frac{d\lambda}{\Sigma m}\cos\gamma' ;$$

portanto,

$$\omega = \frac{\lambda''}{\Sigma m}\cos\alpha' + \frac{\lambda'}{\Sigma m}\cos\beta' + \frac{\lambda}{\Sigma m}\cos\gamma' ;$$

ou, o que é o mesmo,

$$\Sigma m.\,\omega = \lambda''\cos\alpha' + \lambda'\cos\beta' + \lambda\cos\gamma' ;$$

mas,

$$\lambda = \frac{1}{2}At,\ \lambda' = \frac{1}{2}Bt,\ \lambda'' = \frac{1}{2}Ct ;$$

d'onde,

$$\Sigma m.\,\omega = \frac{t}{2}(C\cos\alpha' + B\cos\beta' + A\cos\gamma').$$

Por ser constante o coefficiente de t por que o plano é dado, façamos

$$K = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

e demos á nossa ultima equação a fórma seguinte:

$$\Sigma m.\,\omega = \frac{K}{2}\,t\left(\frac{C}{K}\cos\alpha' + \frac{B}{K}\cos\beta' + \frac{A}{K}\cos\gamma'\right).$$

Ora, evidentemente, as quantidades

$$\frac{C}{K},\ \frac{B}{K},\ \frac{A}{K}$$

podem representar as expressões dos cosenos dos angulos que uma recta OF, arbitrariamente considerada, faz, respectivamente, com os eixos coordenados.

Chamando (α'', β'' γ'') estes angulos, teremos:

$$\cos \alpha'' = \frac{C}{K}, \cos \beta'' = \frac{B}{K}, \cos \gamma'' = \frac{A}{K};$$

d'onde

$$\cos^2 \alpha'' + \cos^2 \beta'' + \cos^2 \gamma'' = \frac{C^2 + B^2 + A^2}{K^2};$$

d'onde,

$$1 = \frac{C^2 + B^2 + A^2}{K^2};$$

d'onde,

$$K = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

que é o valor arbitrado á K.

E como a direcção OF não depende da posição do plano P, é claro que a posição d'um certo plano Π, perpendicular á OF, não dependerá tambem da posição do plano P. Designando, pois, por φ o angulo EOF, angulo que mede a inclinação dos dois planos P e Π, teremos:

$$\cos \varphi = \frac{C}{K} \cos \alpha' + \frac{B}{K} \cos \beta' + \frac{A}{K} \cos \gamma'.$$

Substituindo este valor na ultima equação, resultará:

$$\Sigma m \,.\, \omega = \frac{K}{2} \,.\, t \cos \varphi.$$

Em um tempo dado, qualquer, a quantidade $\Sigma m \omega$ sómente dependerá do angulo φ por ser K uma constante; assim, essa quantidade variará com o angulo φ.

Si a quantidade $\Sigma m \omega$ varia com o angulo φ, procuremos saber si ella admitte um *maximum* e qual é o valor de φ que o fornece. Ora,

$$d\,[\Sigma m \,.\, \omega] = -\left(\frac{K}{2} t\right) \operatorname{sen} \varphi \,.\, d\,\varphi,$$

e

$$d^2\,[\Sigma m \,.\, \omega] = -\left(\frac{K}{2} t\right) \cos \varphi \,.\, d^2\,\varphi;$$

d'onde, fazendo

$$\frac{d\,[\Sigma\, m\,.\,\omega]}{d\,\varphi} = 0,$$

resultará

$$sen\,\varphi = 0\,;$$

d'onde,

$$\varphi = 0\,;$$

isto é, que, si o plano Π coincidir com o plano P, a quantidade $\Sigma\, m\, \omega$ será um *maximum*.

N'este estado, teremos:

$$\Sigma\, m\,.\,\omega = \frac{K}{2}\, t.$$

Assim, *existe um plano fixo tal, que a somma das áreas descriptas durante um tempo qualquer pelas projecções dos raios vectores dos pontos moveis sobre este plano, multiplicadas por suas massas, é maior que para qualquer outro plano de projecção.*

Tendo designado por $(\alpha', \beta', \gamma')$ os angulos que, respectivamente, a recta OE faz com os eixos coordenados e attendendo á coincidencia dos dois planos P e Π, no caso do *maximum* das áreas, resultará:

$$\cos\alpha' = \frac{C}{K},\ \cos\beta' = \frac{B}{K},\ \cos\gamma' = \frac{A}{K}\,;$$

e como os valores dos angulos $(\alpha', \beta', \gamma')$ nos farão conhecer a posição do plano P, vemos, claramente, que estes angulos serão quantidades constantes em relação ao tempo. Assim, podemos ainda concluir que *o plano do maximum das áreas não varia com o tempo, quaesquer que sejam as perturbações de todo o systema, comtanto que não haja novas forças exteriores.*

Foi em virtude d'esta notavel propriedade e da propriedade geometrica relativa ás áreas, que Laplace chamou a um tal plano *o plano invariavel* ou *plano do maximum das áreas*, cuja determinação é muito util no systema do mundo.

Conhecida a área maxima e o plano de projecção P cuja equação é

$$Az + By + Cx = 0,$$

será sempre facil a determinação das áreas sobre um plano qualquer traçado pelo fóco. Para isto, seja ψ o angulo que um plano qualquer faz com o plano P e representemos por G a área descripta sobre o primeiro plano. Evidentemente, teremos:

$$G = \Sigma\, m\, \omega . \cos \psi .$$

O simples exame d'esta equação mostra que: 1°, para todos os planos que fazem o mesmo angulo com o do *maximum*, as áreas são iguaes; 2°, todos os planos parallelos ao do *maximum* admittem as mesmas propriedades; 3°, para todos os planos perpendiculares ao do *maximum* as áreas são nullas.

139. Poinsot definiu *o plano invariavel* como sendo *o plano do conjugado geral resultante de todos os conjugados produzidos pelas differentes forças do systema*. Com effeito, as quantidades de movimento ou forças que realmente animam os pontos do systema considerado sendo compostas, em um instante qualquer, como si fossem applicadas a um solido invariavel, poderão, em geral, ser reduzidas a uma força unica e a um conjugado unico. O momento d'este conjugado resultante será expresso por

$$K = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

e o seu plano será perpendicular á recta que faz, respectivamente, com os eixos coordenados os angulos, cujos cosenos são

$$\frac{C}{K'} \quad \frac{B}{K'} \quad \frac{A}{K} .$$

Esta bella propriedade dynamica constitue o *judicioso aperfeiçoamento* dado por Poinsot á theoria do plano invariavel. [1]

---

[1] Vide a Memoria de Poinsot, *Théorie et détermination de l'équateur du système solaire* e tambem a *Théorie analytique du système du monde*, de Pontécoulant, onde este astronomo refuta a critica que Poinsot fez ao *Plano* de Laplace.

LEI DAS FORÇAS VIVAS

440. Seja a equação geral da dynamica

$$\Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2}\right) \delta y + \right.$$
$$\left. + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2}\right) \delta z \right] = 0,$$

ou, o que é o mesmo,

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = \\ = \Sigma m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta y\right) . \end{array}\right\} \quad (a)$$

Si nas equações (2) do artigo (403) não entra a variavel t, que representa o tempo, as equações (3) do mesmo artigo serão satisfeitas quando em logar das variações (δx, δy, δz), etc., substituirmos as differenciaes (dx, dy, dz), etc. Supponhamos, pois, um systema cujas equações de ligação dos seus differentes pontos materiaes não contenham a variavel relativa ao tempo. Um tal systema poderá ter pontos fixos e pontos sujeitos a permanecer sem attrito sobre curvas ou superficies fixas; mas, si existem pontos do systema sujeitos a ficar sobre curvas ou superficies moveis, e si quizermos attender ao attrito dos pontos que se movem sobre curvas ou superficies fixas, as equações de ligação que definem o systema conterão necessariamente a variavel relativa ao tempo.

Isto posto, as ligações não variando com o tempo, façamos na equação (a)

$$\delta x = dx, \delta y = dy, \delta z = dz, \delta x' = dx', \text{ etc.}$$

que resultará a equação seguinte:

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) = \Sigma m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz\right);$$

d'onde,

$$\frac{1}{2} d \cdot \Sigma \mathrm{m} \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = \Sigma \; (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz);$$

ou, por ser

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

teremos:

$$\frac{1}{2} d \;.\; \Sigma\, m \left(\frac{ds^2}{dt^2}\right) = \Sigma\; (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz);$$

d'onde,

$$\frac{1}{2} \Sigma \left(m \frac{ds^2}{dt^2}\right) = \int \Sigma\; (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) + \mathrm{C};$$

d'onde, por ser

$$v = \frac{ds}{dt},$$

resultará:

$$\Sigma\, (mv^2) = 2 \int \Sigma (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) + \mathrm{C}. \qquad \text{(b)}$$

Ao producto da massa de um corpo em movimento pelo quadrado de sua velocidade chama-se, desde Leibnitz, *a força viva* do corpo. No caso em que a quantidade

$$\Sigma\; (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

é integravel, suppondo

$$\Sigma\; (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = d\, \varphi\, (x, y, z, x', \text{etc.}),$$

teremos:

$$\Sigma (mv^2) = 2\, \varphi\, (x, y, z, x', \text{etc.}) + C. \qquad \text{(c)}$$

Designando por k, k', k'', etc., as velocidades iniciaes dos differentes pontos do systema m, m', m'', etc., e por (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') as coordenadas iniciaes que fixam as posições dos mesmos pontos, teremos:

$$\Sigma\; (mk^2) = 2\, \varphi\, (a, b, c, a', \text{etc.}) + \mathrm{C}; \qquad \text{(d)}$$

d'onde, eliminando C das equações (c) e (d), resultará a equação seguinte:

$$\Sigma (mv^2) - \Sigma (mk^2) = 2\,\varphi (x, y, z, x', \text{etc.}) - 2\,\varphi (a, b, c, a', \text{etc.}) \quad (e)$$

Tal é a equação que traduz a lei das forças vivas, devida a Christiano Huyghens. Esta lei consiste precisamente em que *a differença entre as sommas das forças vivas de todos os pontos d'um systema, em um tempo dado e na origem do movimento, depende sómente das coordenadas dos moveis relativas a estas duas épocas e não de suas ligações nem das trajectorias descriptas pelos mesmos pontos na passagem de suas posições iniciaes a suas posições finaes.*

A grande utilidade d'esta lei é estabelecer uma equação finita entre as velocidades dos pontos d'um systema e as coordenadas que fixam as suas posições no espaço; assim, quando uma só variavel determina a posição d'um corpo, a equação (e) será sufficiente para permittir solução do problema.

441. Si o systema que se considera não soffre a acção de forças acceleratrizes, ter-se-ha:

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0;\ X' = 0,\ Y' = 0,\ Z' = 0;\ \text{etc.}$$

d'onde, a equação (b) dá-nos:

$$\Sigma (mv^2) = C;$$

isto é, que *a somma das forças vivas de todos os corpos d'um systema em movimento é constante, quando estes corpos sòmente experimentam as acções que resultam de suas ligações.*

442. Si todos os pontos d'um systema em movimento occupam as mesmas posições em duas épocas differentes, teremos:

$$\varphi (x, y, z, x', \text{atc.}) = \varphi (a, b, c, a', \text{etc.});$$

d'onde, a equação (e) dá-nos:

$$\Sigma (mv^2) = \Sigma (mk^2);$$

isto é, que *a somma das forças vivas de todos os corpos d'um systema em movimento não varia com o tempo e conserva constantemente o seu valor inicial.* E' esta lei conhecida pelo nome de *conservação das forças vivas.*

443. A quantidade

$$\Sigma\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

poderá ser integravel em dois casos extremamente notaveis: 1°, *quando as forças do systema são constantemente dirigidas para centros fixos*; 2°, *quando as forças são acções mutuas*; mas, no primeiro caso, é necessario que as forças sejam subordinadas ás distancias dos pontos do systema aos centros fixos; e, no segundo, as forças devem depender sómente das suas mutuas distancias.

PRIMEIRO CASO.— Sejam (a, b, c) as coordenadas rectangulas d'um centro fixo qualquer e R a resultante das forças constantemente dirigidas para este centro e actuando sobre a molecula m cujas coordenadas supponhamos que sejam, no fim do tempo t, (x, y, z). Chamando r a distancia do ponto m ao fóco, teremos:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Os cosenos dos angulos que a recta r faz respectivamente com os eixos coordenados são, evidentemente,

$$\frac{x-a}{r}, \quad \frac{y-b}{r}, \quad \frac{z-c}{r};$$

mas, por causa da relação precedente, estes cosenos serão

$$\frac{dr}{dx}, \quad \frac{dr}{dy}, \quad \frac{dr}{dz}.$$

A força R tem para componentes segundo os eixos coordenados,

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}\frac{dr}{dx}, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{R}\frac{dr}{dy}, \quad \mathrm{Z} = \mathrm{R}\frac{dr}{dz}.$$

Analogamente, para outros pontos do systema, teriamos:

$$X'=R'\frac{dr'}{dx'},\ Y'=R'\frac{dr'}{dy'},\ Z'=R'\frac{dr'}{dz'},\ X''=R''\frac{dr''}{dx''},$$

$$Y''=R''\frac{dr''}{dy''},\ Z''=R''\frac{dr''}{dz''},\text{etc.}$$

d'onde,

$$\Sigma X=\Sigma R\frac{dr}{dx},\ \Sigma Y=\Sigma R\frac{dr}{dy},\ \Sigma Z=\Sigma R\frac{dr}{dz};$$

e multiplicando a primeira d'estas equações por dx, a segunda por dy e a terceira por dz, e sommando-as, teremos:

$$\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)=\Sigma(Rdr).$$

Ora, como suppozemos que R depende de r, teremos:

$$R=\varphi(r);$$

d'onde a equação precedente nos dará:

$$\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)=\Sigma[\varphi(r)\,dr].$$

Examinando esta equação, vemos que cada termo do segundo membro contendo uma unica variavel será uma differencial exacta; d'onde, o primeiro membro tambem o será; e, portanto, poderá ser integravel.

444 SEGUNDO CASO.— Seja p a distancia entre dois pontos m e m' d'um systema cujas forças resultem das acções interiores que exercem entre os seus differentes pontos e dependem das suas mutuas distancias. Si (x, y, z), x', y', z') são as coordenadas rectangulares que fixam as posições dos dois pontos considerados, teremos:

$$p^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

Designemos por P a força que resulta da acção reciproca dos pontos m e m', força cuja direcção é a da recta que une estes dois pontos. Os cosenos dos angulos que a recta p faz respectivamente com os eixos coordenados são:

$$\frac{x-x'}{p}, \quad \frac{y-y'}{p}, \quad \frac{z-z'}{p};$$

d'onde a acção de m' sobre m terá para componentes segundo os eixos coordenados as quantidades

$$X = P\,\frac{x-x'}{p}, \quad P = Y\,\frac{y-y'}{p}, \quad Z = P\,\frac{z-z'}{p}. \qquad \text{(f)}$$

Por ser a acção de m sobre m' dirigida segundo a mesma recta p, mas em sentido contrario ao da acção de m' sobre m, teremos:

$$X' = -P\,\frac{x-x'}{p}, \quad Y' = -P\,\frac{y-y'}{p} \quad Z' = -P\,\frac{z-z'}{p}, \qquad \text{(g)}$$

para as componentes da acção de m sobre m'.

Multiplicando as tres equações (f) respectivamente por (dx, dy, dz) e as tres equações (g) respectivamente por (dx', dy', dz'), teremos:

$$Xdx = P\,\frac{x-x'}{p}\,dx, \quad Ydy = P\,\frac{y-y'}{p}\,dy, \quad Zdz = P\,\frac{z-z'}{p}\,dz;$$

$$X'dz' = -P\,\frac{x-x'}{p}dx', \quad Y'dy' = -P\,\frac{y-y'}{p}\,dy_{,},$$

$$Z'dx' = -P\,\frac{z-z'}{p}\,dz';$$

d'onde, sommando estas equações, resultará:

$$(Xdx + Ydy + Zdz) + (X'dx' + Y'dy' + Z'dz') =$$
$$= P\left[\frac{x-x'}{p}(dx - dx') + \frac{y-y'}{p}(dy - dy') + \frac{z-z'}{p}(dz - dz')\right];$$

mas, por ser

$$p^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

teremos:

$$pdp = (x - x')(dx - dx') + (y - y')(dy - dy') + (z - z')(dz - dz');$$

d'onde,

$$Xdx + Ydy + Zdz) + (X'dx' + Y'dy' + Z'dz') = Pdp;$$

e, em geral,

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = \Sigma(Pdp).$$

Examinando esta equação, vemos facilmente que o segundo membro sendo uma differencial exacta, o primeiro tambem o será; portanto, poderá ser integravel.

445. A quantidade

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

não é uma differencial exacta quando as forças dependem da *direcção* ou da *velocidade* dos moveis, o que acontece quando o systema soffre a acção de resistencias quaesquer.

As forças dependem da direcção dos moveis quando os pontos do systema em movimento experimentam attritos sobre as superficies ou curvas em que se movem; n'este caso, a quantidade

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

não será integravel.

Para o provarmos consideremos que um ponto do systema seja sujeito a mover-se sobre a superficie fixa definida pela equação $L = 0$.

O attrito sendo proporcional á pressão normal N que o ponto exerce sobre a superficie dada, poderemos representa-lo por fN, sendo f um coefficiente dado. Por ser a direcção do attrito tangente á trajectoria do ponto considerado e contraria á sua velocidade, e chamando s o arco de trajectoria

descripto durante o tempo t pelo mesmo ponto, as componentes da força fN segundo tres eixos rectangulares fixos serão respectivamente

$$-f\mathrm{N}\frac{dx}{ds},\ -f\mathrm{N}\frac{dy}{ds},\ f\mathrm{N}\frac{dz}{ds},$$

d'onde,

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy\ \mathrm{Z}dz =$$

$$= -\left(f\mathrm{N}\frac{dx}{ds}\right)dx - \left(f\mathrm{N}\frac{dy}{ds}\right)dy - \left(f\mathrm{N}\frac{dz}{ds}\right)dz,$$

ou

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = -f\,\mathrm{N}ds\ ;$$

e, em geral,

$$\Sigma\,(\mathrm{X}dx + dy\,\mathrm{Y} + \mathrm{Z}dz = -\Sigma\,(\mathrm{N}ds).$$

Ora, o segundo membro d'esta equação não sendo uma differencial exacta, é claro que o primeiro tambem não o será.

446. As forças dependem das velocidades dos moveis quando os pontos do systema experimentam a resistencia do meio em que se movem; e, n'este caso, a quantidade

$$\Sigma\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

não será integravel. Com effeito, por considerações analogas ás precedentes, facilmente estabeleceriamos que

$$\Sigma\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = -\Sigma\left[f(v)ds\right];$$

e como o segundo membro d'esta equação não é integravel, o primeiro tambem não o será.

447. A lei das forças vivas, exclusivamente relativa a systemas cujas ligações são dadas por equações que não

encerram explicitamente o tempo como variavel, é ainda sujeita a restricções.

Consistem estas restricções em que *a somma das forças vivas soffre constantemente uma perda no choque dos corpos que não são perfeitamente elasticos, e geralmente todas as vezes que o systema experimenta uma mudança brusca qualquer*. (A. Comte.)

Com effeito, n'um choque de corpos inelasticos, o conflicto sómente dura emquanto os corpos não adquirem velocidades em virtude das quaes não se prejudiquem mais, isto é, velocidades que não produzam acção entre os corpos. Ora, si nullo é o effeito d'estas velocidades sobre a acção mutua dos corpos, imaginemos que sejam impressas, antes ou durante o choque, estas mesmas velocidades. E' claro que a acção será exactamente a mesma si os corpos são animados de velocidades compostas das velocidades que lhes são proprias e das velocidades que lhes são impressas; e ainda a acção será exactamente a mesma si as velocidades impressas forem iguaes e directamente contrarias ás velocidades que não produzam acção entre os corpos.

Si, pois, $(v,\ v',\ v'',....)$ designam as velocidades que possuem, antes do choque, os pontos materiaes d'um systema em movimento, systema cujas ligações sejam dadas por equações que não encerrem o tempo como variavel; e si $(k,\ k',\ k'',....)$ designam as velocidades que, respectivamente, animam aos mesmos pontos depois do choque, a equação (e) poderá ser escripta da maneira seguinte:

$$mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \ldots. - mk^2 - m'k'^2 - m''k''^2 - \ldots. =$$

$$= 2\varphi(x, y, z, x', \text{etc.}) - 2\varphi(a, b, c, a', \text{etc.}).$$

Esta equação substituirá quando compuzermos as velocidades $(v,\ v',\ v'',....)$, $(k,\ k',\ k'',...)$, com as velocidades $(-k,\ -k',\ -k'',....)$, pois o seu segundo membro sómente depende das coordenadas que fixam as posições dos pontos, antes e depois do choque.

Chamando u a velocidade resultante de v e $-k$, u' a velocidade resultante de v' e $-k'$, u'', etc., e attendendo a que são nullas as velocidades $(k-k)$, $(k'-k')$, etc., a equação precedente se transformará na seguinte :

$$mu^2 + m'u'^2 + m''u''^2 + \dots = 2\varphi(x, y, z, x', \text{etc.}) -$$
$$- 2\varphi(a, b, c, a', \text{etc.}) ;$$

ou symbolicamente,

$$\Sigma (mu^2) = 2\varphi(x, y, z, x', \text{etc}) - 2\varphi(a, b, c, a', \text{etc.}) ;$$

d'onde, em vista da equação (e), teremos :

$$\Sigma\, mv^2) - (mk^2) = \Sigma (mu^2).$$

Por serem $(v, v', v'', \dots)$ as velocidades antes do choque e $(k, k', k'', \dots)$ as velocidades depois do choque, as quantidades $(u, u', u'', \dots)$ serão as velocidades perdidas pelo choque ; d'onde, $\Sigma(mu^2)$ exprimirá a força viva resultante d'estas ultimas velocidades.

Assim podemos concluir o theorema seguinte : *no choque de corpos elasticos faz-se uma perda de forças vivas igual á força viva que os mesmos corpos teriam si cada um d'elles fosse animado da velocidade que perde no choque.* Tal é o importante theorema devido a Carnot.

448. No choque de corpos perfeitamente elasticos não ha perda de forças vivas. Com effeito, a compressão e a restituição das elasticidades regulando-se pela lei de Newton, o conflicto sómente durará até que os corpos voltem, pela restituição ás mesmas posições que tinham no começo da compressão. D'onde,

$$x = a,\ y = b,\ z = c,\ x' = a',\ y' = b',\ z' = c',$$
$$x'' = a'',\ y'' = b'',\ z'' = c'', \text{ etc. ;}$$

portanto,

$$\varphi(x, y, z, x', \text{etc.}) = \varphi(a, b, c', a', \text{etc}) ;$$

d'onde a equação (e) dá-nos :

$$\Sigma (mv^2) = \Sigma (mk^2) ;$$

isto é, que *a força viva antes do choque é a mesma que depois do choque.*

449. MAXIMUM OU MINIMUM DAS FORÇAS VIVAS. —Seja a equação (14),

$$\Sigma (mv^2) = 2 \int \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) + C.$$

Differenciando-a, teremos :

$$d.\ \Sigma (mv^2) = 2\ \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Si as ligações do systema são dadas por equações que não encerram o tempo como variavel, é claro que na equação precedente poderemos substituir as quantidades (dx, dy, dz, dx', dy', dz', etc.), por (δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, etc.) ; d'onde,

$$d.\ \Sigma (mv^2) = 2\ \Sigma (X\ \delta x + Y\delta y + Z\ \delta z).$$

Considerando que o systema em movimento poderá passar por uma posição tal que fique em equilibrio sob a acção das forças acceleratrizes ; e tendo em vista que, em uma tal situação, a lei geral das velocidades virtuaes deverá ter logar e que, portanto,

$$\Sigma\ (X\ \delta\ x + Y\ \delta\ y + Z\ \delta\ z) = 0,$$

resultará a equação seguinte :

$$d.\ \Sigma\ (mv^2) = 0\ ;$$

isto é, que *de todas as situações que um systema póde successivamente tomar em movimento, a de equilibrio corresponde ao maximum ou minimum das forças vivas do mesmo systema.*

450. Si a gravidade é a unica força acceleratriz que actua sobre o systema considerado, a somma das forças vivas attinge ao *maximum* quando o centro de gravidade do systema occupa a situação *mais baixa* que é possivel ; e a somma das forças vivas é um *minimum* quando o centro de gravidade occupa a posição *mais alta* que é possivel. Para o demonstrarmos seja a equação (14),

$$\Sigma\ (mv^2) = 2 \int \Sigma\ (Xdx + Ydy + Zdz) + C.$$

Suppondo que o eixo dos z seja dirigido segundo a vertical, teremos:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -mg\,;$$

d'onde

$$\Sigma\,(mv^2) = C - 2.\,\Sigma m \int g dz\,;$$

ou, designando por M a massa do systema e por z_1 a ordenada do seu centro de gravidade,

$$\Sigma\,(mv^2) = C - 2\,Mgz_1.$$

Examinando esta equação, vemos que o seu primeiro membro sendo positivo, o segundo tambem o deverá ser; d'onde, por ser z_1 a unica variavel que entra no segundo membro, a somma das forças vivas será um *maximum* quando a variavel z_1 fôr um *minimum* e será um *minimum* quando z_1 fôr um *maximum*, o que se queria demonstrar.

451. Estabilidade e instabilidade do equilibrio.— Vimos que a quantidade $\Sigma\,(mv^2)$ é um *maximum* ou *minimum* quando o systema que se considera acha-se em uma posição estatica, sob a acção exclusiva das forças acceleratrizes; agora mostremos que si essa quantidade é um *maximum*, o equilibrio será *instavel* e si é um *minimum* o o equilibrio será *estavel*.

Para definirmos as noções de equilibrio *estavel* e *instavel*, consideremos que o systema em estado de equilibrio soffra um pequeno deslocamento. Si, pela acção unica das forças acceleratrizes, o systema retoma a sua primeira posição de equilibrio, fazendo oscillações infinitesimaes, o equilibrio será estavel; mas, si as oscillações não são infinitamente pequenas e afastam cada vez mais o systema da primitiva situação de equilibrio, o equilibrio será instavel.

Com effeito, para o demonstrarmos, consideremos que o systema em movimento occupe uma posição de equilibrio

sob a acção exclusiva das forças acceleratrizes. Imaginemos que cada ponto m receba uma velocidade infinitamente pequena k, de modo que o systema comece a mover-se com a força viva inicial muito pequena $\Sigma\,(mk^2)$.

No fim do tempo t a força viva do systema será

$$\Sigma\,(mv^2) = \Sigma\,(mk^2) + 2[\varphi\,(x,\ y,\ z,\ x' \text{ etc.}) - \varphi(a,\ b,\ c,\ a',\ \text{etc.})].$$

Representemos as coordenadas $(x,\ y\ z,)$ do ponto m no fim do tempo t por

$$a + y_1,\quad b + y_1,\quad c + z_1\ ;$$

analogamente, representemos as coordenadas $(x',\ y',\ z')$ do ponto m' por

$$a' + x'_1,\quad b' + y'_1,\quad c' + z'_1\ ;$$

e assim por diante. Substituindo os valores de $(x,\ y,\ z)$, (x', y', z'), etc., na equação precedente e desenvolvendo

$$\varphi\,(a + x_1,\quad b + y_1,\quad c + z_1,\quad a' + x'_1,\ \text{etc.})$$

em serie segundo as potencias ascendentes de $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x'_1,\ y'_1,\ z'_1)$, etc., o desenvolvimento poderá constar de duas partes: uma igual á

$$\varphi\,(a,\ b,\ c,\ a',\ \text{etc.})\ ;$$

outra que designaremos por

$$\psi\,(x_1,\ y_1,\ x_1,\ x'_1,\ \text{etc.})\ ;$$

parte esta que se annullará quando $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x'_1,\ y'_1,\ z'_1)$, etc., se annullarem. D'onde a equação precedente se reduzirá á fórma

$$\Sigma\,(mv^2) = \Sigma\,(mk^2) + 2\,\psi\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x'_1,\ \text{etc.})\ ;$$

ou

$$\Sigma\,(mv^2) = \Sigma\,(mk^2) + 2\,(\varpi' + \varpi'' + \varpi''' + \text{etc.}),$$

sendo ϖ' o termo que contém as primeiras potencias de (x_1, y_1, z_1), (x'_1, y'_1, z'_1), etc. ; ϖ'' o termo que contém os quadrados e os rectangulos d'estas variaveis ; ϖ''' o termo que contém os cubos e os productos tres a tres das mesmas variaveis ; ϖ'''', etc. Ora, como as coordenadas (a, b, c), (a', b', c'), dos pontos m, m', etc., em estado de equilibrio do systema tornam a expressão

$$\varphi\ (x, y, z, x', \text{etc.})$$

um *minimum* ou um *maximum ;* e em virtude da propriedade caracteristica dos maximos e minimos, teremos:

$$\varpi' = 0\ ;$$

d'onde, a equação precedente se reduzirá á fórma

$$\Sigma\,(mv^2) = \Sigma\,(mk^2) + 2\,(\varpi'' + \varpi''' + \text{etc.})$$

N'esta equação a quantidade $2\,(\varpi'' + \varpi'''$ etc.), deverá ser positiva no caso do *minimum* de $\varphi\ (x, y, z, x', y'$, etc.) e negativa no caso do *maximum* da mesma quantidade ; e por ser o primeiro membro $\Sigma\,(mv^2)$ uma quantidade essencialmente positiva, é claro que no caso em que a quantidade $2\,(\varpi'' + \varpi'' +$ etc.) é positiva, a força viva total sendo maxima, o systema não terá estabilidade em seu equilibrio e oscillará d'uma maneira que poderá ser qualquer. No caso do minimo da força viva total o valor de $2\,(\varpi'' + \varpi''' +$ etc.) deverá ser menor que $\Sigma\,(mk^2)$, que é uma quantidade supposta muito pequena ; d'onde facil será a conclusão de que as variaveis (x_1, y_1, z_1), (x'_1, y'_1, z'_1), etc., só poderão ser infinitesimaes e que, portanto, o systema só poderá afastar-se d'uma quantidade infinitamente pequena da sua posição de equilibrio, fazendo oscillações infinitesimaes, o que caracterisa a estabilidade do equilibrio do systema.

452. Coexistencia das oscillações infinitesimaes.— Acabamos de ver que no caso de ser a somma das forças vivas um *minimum*, qualquer que seja o systema de forças, o systema material que consideramos passará por uma po-

sição de equilibrio estavel. Si, por uma causa qualquer, o systema é infinitamente pouco afastado da posição de estabilidade, elle voltará a esta posição depois d'uma serie de oscillações infinitesimaes, que serão successivamente decrescentes, e é claro que causas diversas poderão ao mesmo tempo fazer o systema oscillar de modos differentes.

Daniel Bernouilli, estudando o modo pelo qual se effectuam taes oscillações, descobriu a lei seguinte : *todas as especies de oscillações infinitesimaes produzidas em torno da estabilidade de um systema, simultaneamente por diversas causas, quaesquer que sejam, superpoem-se necessariamente, coexistindo sem se prejudicarem, cada oscillação effectuando-se como si as outras não existissem.* Para estabelecermos algebricamente o principio de Daniel Bernouilli, consideremos que m, m', m'', etc., sejam os n pontos materiaes de um systema qualquer. Sejam em numero ν as equações

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0,\ \text{etc.}, \qquad (h)$$

de ligação dos differentes pontos do systema. Cada ponto sendo determinado por suas tres coordenadas rectangulas, é claro que $3n$ será o numero total de coordenadas do systema. Fazendo

$$3n - \nu = i,$$

as ν equações (h) nos farão conhecer ν coordenadas por meio das outras i.

Isto posto, representemos por (α, β, γ), etc., os valores iniciaes d'estas i coordenadas e sejam, no fim do tempo t,

$$\alpha + u,\ \beta + v,\ \gamma + w,\ \text{etc.},$$

os valores das mesmas variaveis. Admittamos, finalmente, que (u, v, w), etc., sejam quantidades mui pequenas durante o movimento do systema.

As coordenadas dos differentes pontos do systema sendo dadas por expressões que dependerão das quantidades

$$\alpha + u, \ \beta + v, \ \gamma + w, \text{ etc.},$$

desenvolvamos em séries taes expressões e as representemos pelas fórmulas seguintes :

$$\left.\begin{aligned}
x &= p + au + bv + cw + \text{etc.} + \\
&+ \frac{1}{2} e u^2 + \frac{1}{2} f v^2 + \frac{1}{2} g w^2 + h\, uv + k\, uw + l\, vw + \text{etc.}, \\
y &= p_1 + a_1 u + b_1 v + c w_1 + \text{etc.} + \\
&+ \frac{1}{2} e_1 u^2 + \frac{1}{2} f_1 v^2 + \frac{1}{2} g_1 w^2 + h_1 uv + k_1 uw + l_1 vw + \text{etc.}, \\
z &= p_2 + a_2 u + b_2 v + c_2 w + \text{etc.} + \\
&+ \frac{1}{2} e_2 u^2 + \frac{1}{2} f_2 v^2 + \frac{1}{2} g_2 w^2 + h_2 uw + k_2 uw + l_2 vw + \text{etc.}, \\
x' &= p' + a'u + b'v + c'w + \text{etc.} + \\
&+ \frac{1}{2} e'u^2 + \frac{1}{2} f'v^2 + \frac{1}{2} g'w^2 + h'uv + k'uw + l'vw + \text{etc.},
\end{aligned}\right\} (k)$$

etc., etc. Si as equações (h) que definem as ligações dos differentes pontos do systema não encerram o tempo como variavel, é claro que nas séries precedentes todos os coefficientes das potencias de (u, v, w, etc.) serão quantidades constantes, bem como os coefficientes dos productos d'estas mesmas variaveis.

Quanto aos primeiros termos das séries precedentes (p, p_1, p_2), (p', p'_1, p'_2), etc., nós os supporemos tambem constantes dadas o que exige que o systema não seja animado de nenhum movimento de translação ou de rotação.

Suppondo que as forças applicadas aos differentes pontos m, m', m'', etc., dependam das coordenadas dos mesmos pontos ; e substituindo nas expressões que traduzem esses

modos de dependencia os valores de (x, y, z), (x', y', z'), etc., as componentes das forças poderão ser obtidas pelas fórmulas seguintes:

$$\left.\begin{aligned}
X &= P + A u + B v + C w + \text{etc.}, \\
Y &= P_1 + A_1 u + B_1 v + C_1 w + \text{etc.}, \\
Z &= P_2 + A_2 u + B_2 v + C_2 w + \text{etc.}, \\
X &= P' + A' u + B' v + C' w + \text{etc.}, \\
Y' &= P_1' + A_1' u + B_1' v + C_1' w + \text{etc.}, \\
Z' &= P_2' + A_2' u + B_2' v + C_2' w + \text{etc.},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

etc., etc. N'estas séries, os primeiros termos e todos os demais coefficientes de $(u, v, w$, etc.) serão sómente dependentes das constantes (p, p_1, etc.), (a, b, c, etc.), e, portanto, serão quantidades constantes. Si a variavel que define o tempo entrasse nas expressões (1), que definem as forças, as quantidades (P, P_1, P_2, etc.), (A, A_1, A_2, etc.) seriam necessariamente variaveis e dependeriam do tempo; mas supponhamos que uma tal circumstancia não tivesse logar.

Imaginemos agora que as variaveis independentes (u, v, w, etc.) recebam accrescimos infinitamente pequenos ($\delta u, \delta v, \delta w$, etc.), e substituamos na equação geral da dynamica,

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \right.$$
$$\left. + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

os valores de ($\delta x, \delta y, \delta z$, etc.), facilmente obtidos por meio das equações (K). Fazendo separadamente nullos os coeffi-

cientes de cada uma das variações independentes (δu, δv, δw, etc.), teremos:

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)(a+e\,u+h\,v+k\,w+\text{etc.})+$$
$$+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)(a_1+e_1u+h_1v+k_1w+\text{etc.})+$$
$$+\left(m\frac{d^2z}{d^2t}-Z\right)(a_2+e_2u+h_2v+k_2w+\text{etc.})=0,$$

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)(b\;+f\,v+h\,u+l\,w+\text{etc.})+$$
$$+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)(b_1+f_1v+h_1u+l_1w+\text{etc.})+$$
$$+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)(b_2+f_2v+h_2u+l_2w+\text{etc.})=0,$$

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)(c+g\,w+k\,u+l\,v+\text{etc.})+$$
$$+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)(c_1+g_1w+k_1u+l_1v+\text{etc.})+$$
$$+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)(c_2+g_2w+k_2u+l_2v+\text{etc.})=0;$$

e analogamente teriamos as equações relativas aos outros pontos do systema.

Isto posto, substituamos em cada uma d'estas equações os valores de (x, y, z), (x', y', z'), etc.; (X, Y, Z), (X', Y', Z'), etc.; e depois da substituição desprezemos os quadrados e productos de $(u, v, w$, etc.), bem como os productos d'estas variaveis pelos coefficientes differenciaes

$$\frac{d^2u}{dt^2},\quad \frac{d^2v}{dt^2},\quad \frac{d^2w}{dt^2},\ \text{etc.}$$

O systema das equações resultantes será composto de equações da fórma

$$\left.\begin{array}{l} D\,.\,\dfrac{d^2u}{dt^2}+E\,.\,\dfrac{d^2v}{dt^2}+F\,.\,\dfrac{d^2w}{dt^2}+\text{etc.}+ \\ +G\,.\,u+H\,.\,v+K\,.\,w+\text{etc.}=Q, \end{array}\right\}\quad (m)$$

que é uma *equação linear de coefficientes constantes.* Um tal conjuncto de equações será sufficiente para uma primeira approximação no estudo do movimento oscillatorio.

Conhecidos, por meio das equações cujo typo é dado pela equação (m), os valores approximados das variaveis (u, v, w, etc.), poderiamos fazer uso do *methodo das approximações successivas* e ter assim um conhecimento cada vez mais approximado dos valores das mesmas variaveis; contentar-nos-hemos porém, com a primeira approximação.

Si augmentarmos cada uma das variaveis (u, v, w, etc.), d'uma quantidade constante, poderemos tornar nullos os segundos membros das equações do grupo (m); assim, podemos desde já suppôr que essas equações são privadas dos seus segundos membros. Mas, si as equações do grupo (m) não possuem segundos membros é porque os valores iniciaes (α, β, γ, etc.), das i variaveis independentes (u, v, w, etc.,) correspondem a uma posição de equilibrio do systema; e, portanto, estas variaveis se referem aos deslocamentos dos pontos materiaes do systema. Taes deslocamentos devendo ser compativeis com as condições de ligações dos differentes pontos do systema, é claro que, em cada caso particular, não devem ser dados os valores iniciaes das coordenadas (x, y, z, x', etc.) e das velocidades

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \text{etc.} \right);$$

mas devem ser arbitrariamente dados os valores iniciaes das i variaveis independentes (u, v, w, etc.) e das velocidades

$$\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}, \text{etc.} \right).$$

As equações do grupo (m), quando os Q são iguaes a zero, serão satisfeitas pelas expressões dos valores seguintes:

$$\left.\begin{aligned} u &= \text{RN} \ \text{sen} \,(t\sqrt{\rho} - r), \\ v &= \text{RN}' \ \text{sen} \,(t\sqrt{\rho} - r), \\ w &= \text{RN}'' \ \text{sen} \,(t\sqrt{\rho} - r), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(n)}$$

etc., etc. N'estas formulas, R e r são constantes arbitrarias e ρ, N, N', N'', etc., são constantes indeterminadas. Feitas

as substituições dos valores precedentes de u, v, w, etc., nas equações (m), privadas dos seus segundos membros, resultarão i equações da fórma seguinte:

$$(DN + EN' + FN'' + \text{etc.})\, \rho = GN + HN' + KN'' + \text{etc.} \qquad (p)$$

Si das i equações que constituem o grupo (p) eliminarmos $(i-1)$ constantes indeterminadas N, N', N'', etc., a de ordem i tambem será eliminada por tornar-se um factor commum a toda equação; d'onde resultará uma equação do gráo i que servirá para a determinação de ρ. Seja esta equação symbolisada por

$$\Delta = 0. \qquad (q)$$

Os valores de $(i-1)$ das constantes N, N', N'', etc., deduzidos das equações do grupo (p), serão fracções algebricas racionaes do gráo i, relativamente a ρ, todas com um mesmo denominador e multiplicadas pela constante N, por exemplo. Fazendo-se a constante indeterminada N igual ao denominador das fracções racionaes, as i constantes N, N', N'', etc., serão definidas por polynomios do gráo i em relação a ρ. As equações (m), privadas dos seus segundos membros, serão verificadas não só pelos valores dados pelas equações (n), relativas a qualquer das raizes da equação (q), como pelos valores (u, v, w, etc.), dados pelas sommas de todos esses valores particulares, nas quaes poderão ser mudadas as constantes R e r simultaneamente com as raizes da equação (q). Assim, chamando ρ, ρ_1, ρ_2, etc., as raizes da equação (q) e designando por N, N_1, N_2, etc., os valores correspondentes da constante N; por N'_1, N'_1, N''_2, etc., os valores correspondentes de N'; por N'', N''_1, etc., as equações (m), privadas dos seus segundos membros, serão satisfeitas pelos seguintes valores:

$$\left.\begin{aligned} u &= RN \operatorname{sen}(t\sqrt{\rho} - r) + R_1N_1 \operatorname{sen}(t\sqrt{\rho_1} - r_1) + \\ &\quad + R_2N_2 \operatorname{sen}(t\sqrt{\rho_2} - r_2) + \text{etc.}, \\ v &= RN' \operatorname{sen}(t\sqrt{\rho} - r) + R_1N'_1 \operatorname{sen}(t\sqrt{\rho_1} - r_1) + \\ &\quad + R_2N'_2 \operatorname{sen}(t\sqrt{\rho_2} - r_2) + \text{etc.}, \\ w &= RN'' \operatorname{sen}(t\sqrt{\rho} - r) + R_1N''_1 \operatorname{sen}(t\sqrt{\rho_1} - r_1) + \\ &\quad + R_2N''_2 \operatorname{sen}(t\sqrt{\rho_2} - r_2) + \text{etc.}, \end{aligned}\right\} \quad (r)$$

etc., etc., etc. N'estas expressões dos valores das variaveis (u, v, w, etc.), as quantidades (R, R_1, R_2, etc.) e (r, r_1, r_2, etc.) são constantes arbitrarias em numero igual a $2i$; d'onde conclue-se que as equações (r) serão i integraes completas das equações differenciaes de segunda ordem que constituem o grupo (m) privado dos segundos membros.

Facilmente determinariamos em cada caso particular os valores de R cos r, R_1 cos r_1, R_2 cos r_2, etc., R sen r, R_1 sen r_1 R_2, sen r_2, etc., por meio dos valores dados para $t = 0$, das $2i$ quantidades

$$(u, v, w, \text{etc.}), \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}, \text{etc.}\right);$$

e como todos estes valores são suppostos mui pequenos, os de R, R_1, R_2, etc., o serão tambem. Assim, todas as raizes ρ, ρ_1, ρ_2, etc., da equação (q) sendo reaes, positivas e desiguaes, os valores de (u, v, w, etc.), dados pelas equações (r), serão periodicos e permanecerão mui pequenos em toda a duração do movimento; mas, si a equação (q) admittir raizes imaginarias ou negativas, as equações (r) não poderão mais dar-nos os valores approximados de (u, v, w, etc.), em um tempo qualquer. O caso das raizes reaes, positivas e desiguaes, da equação (q), corresponde a que a posição de equilibrio d'onde o systema foi afastado era estavel; e o caso das raizes imaginarias ou negativas corresponde a que a posição de equilibrio d'onde o systema foi afastado era instavel.

Si os coefficientes R_1, R_2, etc., são nullos, as equações (r) transformam-se nas equações (n), e desprezando os quadrados e os productos das variaveis, as equações (21) combinadas com as equações (n) dão-nos as expressões seguintes:

$$\left.\begin{aligned}
x &= p + (a\ N + b\ N' + c\ N'' + \text{etc.})\ R \text{ sen } (t\sqrt{\rho} - r),\\
y &= p_1 + (a_1\ N + b_1\ N' + c_1\ N'' + \text{etc.})\ R \text{ sen } (t\sqrt{\rho} - r),\\
z &= p_2 + (a_2\ N + b_2\ N' + c_2\ N'' + \text{etc.})\ R \text{ sen } (t\sqrt{\rho} - r),\\
x' &= p' + (a'\ N + b'\ N' + c'\ N'' + \text{etc.})\ R \text{ sen } (t\sqrt{\rho} - r),\\
y' &= p'_1 + (a'_1\ N + b'_1\ N' + c'_1\ N'' + \text{etc.})\ R \text{ sen } (t\sqrt{\rho} - r),\\
z' &= p'_2 + (a'_2\ N + b'_2\ N' + c'_2\ N'' + \text{etc.})\ R \text{ sen } (t\sqrt{\rho} - r),
\end{aligned}\right\} \text{(s)}$$

etc., etc., etc. Por serem constantes os primeiros termos d'estas equações, bem como os coefficientes dos segundos termos, todos os pontos do systema farão, na direcção dos eixos coordenados, oscillações isochronas de amplitudes constantes e voltarão no mesmo tempo ao seu estado de equilibrio que corresponde á $u=0$, $v=0$, $x=0$, etc., ou á $x=p$, $y=p_1$, $z=p_2$, etc.

O systema material que consideramos, cujas ligações de seus pontos dão-nos i variaveis independentes, abandonando a sua posição de equilibrio poderá tomar ao mesmo tempo i movimentos oscillatorios correspondentes ás i raizes da equação (9); e todos estes movimentos infinitesimaes coexistirão sem se porturbarem, cada um d'elles tendo logar como si fosse o unico. Tal é o theorema de Daniel Bernouilli, notavel por suas bellas applicações á Physica.

DYNAMICA DAS MACHINAS

433. *Definição do trabalho.*— Chama-se *trabalho mecanico* ao producto de uma força pela distancia percorrida por seu ponto de applicação, avaliada esta distancia na direcção da força. A unidade de trabalho mecanico é o *kilogrammetro*.

Supponhamos uma força constante cujo ponto de applicação desloca-se na direcção da força: o *trabalho* será o producto d'essa força pelo deslocamento de seu ponto de applicação. Si o deslocamento tem logar no sentido da força, o trabalho será considerado como *positivo* ou *motor*; mas, si o ponto de applicação desloca-se em sentido inverso da força, o trabalho será considerado como *negativo* ou *resistente*.

434. *Trabalho elementar.* Supponhamos uma força de direcção variavel e de intensidade constante ou variavel. Si o ponto de applicação move-se sempre na direcção da força, este ponto descreverá uma curva e em cada ponto d'esta trajectoria a força será dirigida segundo a tangente. Durante o tempo dt, seja ds o elemento de trajectoria e F a força. O trabalho elementar será $F.\ ds$: é a *differencial do trabalho*.

Si a força F não é tangente á trajectoria descripta pelo seu ponto de applicação, seja α o angulo que a direcção d'essa força faz com a tangente em cada ponto da trajectoria. A differencial do trabalho será:

$$d\,T = F \cos \alpha .\, ds\,;$$

isto é, que *o trabalho elementar de uma força é o producto de sua projecção sobre a tangente á trajectoria pelo deslocamento elementar do ponto de applicação da mesma força.*

Mas, a equação precedente poderia ser tambem considerada assim:

$$d\,T = F .\, ds \cos \alpha\,;$$

isto é, que *o trabalho elementar de uma força é o producto da força pela projecção do deslocamento elementar de seu ponto de applicação sobre a direcção da mesma força.*

O simples exame da equação

$$d\,T = F \cos \alpha\, ds$$

mostra-nos que:

Si

$$\alpha = o,$$
$$d\,T = F\, ds\,;$$

isto é, que *a direcção da força coincide com a da tangente á trajectoria.*

Si

$$\alpha = 90^{\circ},$$
$$d\,T = o,$$

isto é, que *a força sendo normal á trajectoria de seu ponto de applicação, não produz trabalho.*

Si $\alpha > 90^{\circ}$, dT será uma quantidade negativa, isto é, que *o trabalho será resistente.*

Si

$$\alpha = 180^\circ,$$
$$d\,T = -\,F\,ds;$$

isto é, que *o trabalho será resistente e a força será tangencial.*

455. *Trabalho total de uma força.* A equação

$$d\,T = F \cos \alpha\, ds$$

dá-nos:

$$T = \int F \cos \alpha\, ds$$

para o calculo do trabalho total da força F.

456. *Trabalho de um systema de forças applicadas a um ponto material.* Por ser a projecção da resultante de um systema de forças applicadas a um ponto material, sobre a tangente á trajectoria descripta pelo mesmo ponto, igual á somma algebrica das projecções das componentes sobre a mesma recta, o trabalho elementar do systema de forças será:

$$d\,T = \Sigma\, F \cos \alpha\, ds;$$

isto é, que *o trabalho elementar de um systema de forças applicadas a um ponto material é igual á somma algebrica dos trabalhos elementares das mesmas forças, ou ao trabalho elementar da resultante destas forças.*

Da equação precedente deduz-se :

$$T = \int \Sigma\, F \cos \alpha.\, ds;$$

isto é, que *o trabalho total de um systema de forças applicadas a um ponto material, para um deslocamento qualquer do ponto de applicação, é igual á somma dos trabalhos elementares das mesmas forças.*

457. *Trabalho em um systema material qualquer.* Supponhamos um systema qualquer de pontos materiaes,

sob a acção de um numero tambem qualquer de forças. Entre duas posições do systema, cada ponto dará logar a uma equação d'esta fórma:

$$T = \int \Sigma F \cos \alpha \, ds = \Sigma \int F \cos \alpha . \, ds.$$

E a somma das equações relativas a todos os pontos do systema será uma equação da mesma fórma; isto é, que *o trabalho total de um numero qualquer de forças, entre duas posições do systema material ao qual são applicadas, é igual á somma dos trabalhos de todas as forças, entre as duas mesmas posições do systema material.*

458. *Trabalho motor, trabalho resistente.* Em um systema material qualquer, sob a acção de um numero qualquer de forças, chama-se *trabalho motor* a somma dos trabalhos positivos das forças exteriores e *trabalho resistente* a somma dos trabalhos negativos das forças exteriores.

459. *Novo enunciado da lei das fôrças vivas.* Retomemos a equação (*b*) do artigo (440):

$$\Sigma (mv^2) = 2 \int \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) + C.$$

Façamos, para simplificar,

$$T_1 = \int \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz);$$

teremos:

$$\Sigma (mv^2) = 2 \, T_1 + C.$$

Si v_0 designa a velocidade inicial d'um ponto qualquer do systema, a equação precedente nos dará:

$$\Sigma (mv_0^2) = 2 \, T_2 + C;$$

d'onde,

$$\Sigma (mv^2) - \Sigma (mv_0^2) = 2 \, (T_1 - T_2).$$

Designando por T_m o trabalho motor e por T_r o trabalho resistente, teremos:

$$\Sigma (mv^2) - \Sigma (mv_0^2) = 2 \left(T_m - T_r \right);$$

isto é, que *a differença entre as sommas das forças vivas de todos os pontos d'um systema, entre duas posições d'este*

systema, é igual ao dobro da somma dos trabalhos das forças exteriores que lhe são applicados entre as mesmas posições.

460. *Movimento uniforme das machinas.* Si o movimento d'uma machina qualquer é uniforme, a velocidade de cada um de seus pontos será constante; portanto, teremos:

$$\Sigma (mv^2) = \Sigma (mv_0^2);$$

d'onde, resultará:

$$T_m = T_r;$$

isto é, que *em uma machina animada d'um movimento uniforme o trabalho motor é igual ao trabalho resistente.*

Supponhamos que a machina seja submettida a uma unica força motriz tangencial F, applicada a um ponto cuja velocidade constante é v e a uma unica força resistente F', igualmente tangencial, applicada a um ponto cuja velocidade constante é v'. Teremos:

$$T_m = F. v, \quad T_r = F.' v';$$

d'onde,

$$F. v = F.' v';$$

portanto,

$$\frac{F}{F'} = \frac{v'}{v};$$

isto é, que *o que se ganha em força, perde-se em velocidade.* Tal é o popular adagio das machinas.

461. *Resistencias.* As forças resistentes podem ser consideradas nas duas classes seguintes:

1.º Forças que correspondem ao trabalho industrial effectuado pelo emprego da machina, ou *resistencias uteis.*

2.º Forças que, como os attritos e outros modificadores, são chamadas *resistencias passivas.*

Assim, designando por

$$T_u \text{ e } T_f$$

os trabalhos devidos a essas duas classes de resistencias, teremos:

$$T_r = T_u + T_f.$$

462. *Rendimento organico das machinas.* Si na equação

$$T_m = T_r.$$

substituirmos o valor de T_r, resultará:

$$T_m = T_u + T_f;$$

d'onde, a relação entre o trabalho util e o trabalho motor será:

$$\frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{T_u}{T_f}.$$

Esta relação chama-se o *rendimento organico da machina*. Ella póde ser considerada como a medida da perfeição dos orgãos que se destinam á transmissão do trabalho.

O termo T_f, jámais sendo nullo, é claro que não poderemos ter, em caso algum,

$$T_m = T_u;$$

portanto, quanto mais proxima da unidade fôr a relação entre o trabalho util e o trabalho motor; isto é, quanto maior fôr o rendimento organico, mais perfeita será a machina considerada, sob o ponto de vista dynamico.

CAPITULO IV

THEORIA DA ROTAÇÃO EM TORNO D'UM EIXO FIXO

---

463. Tratemos agora da theoria especial da rotação dos solidos invariaveis, cujo estudo geral foi feito ao iniciarmos a *Dynamica dos Systemas*.

A Leonardo Euler devemos a mais didactica das marchas que a sciencia possue para a solução do problema da rotação dos solidos invariaveis, marcha que procuraremos seguir.

Consideremos um solido invariavel de massa M. Seja (fig. 136) este corpo retido por um eixo fixo ZZ' perpendicular em A ao plano da figura. Imaginemos que este solido gyre em torno do eixo ZZ' por effeito d'uma impulsão produzida por um choque. Supponhamos que esta impulsão seja dirigida segundo BC perpendicularmente a um plano AB que passa pelo eixo ZZ'.

Si a impulsão fosse obliqua ao plano AB, a decomporiamos em duas outras, situadas n'um plano parallelo ao eixo fixo: uma segundo a direcção do eixo e outra perpendicular a esta direcção ; e é claro que só teriamos de considerar esta ultima componente, porque a primeira não contribuiria em nada para a rotação do solido, pois seria destruida pela resistencia do eixo fixo. Assim, procuremos estudar as circumstancias da rotação produzida pela impulsão dirigida segundo BC.

Seja v a velocidade que animaria o solido si elle fosse completamente livre e obedecesse unicamente á acção instantanea do choque. Resulta que Mv será a quantidade de movimento que dará a medida da impulsão FB communicada

ao corpo. Seja $AB = p$ a distancia da direcção da força instantanea ao eixo fixo ZZ'.

Devido á força impulsiva, as moleculas do solido descreverão circumferencias de circulos de raios differentes e percorrerão no mesmo instante arcos d'um mesmo numero de gráos. Todos estes arcos sendo proporcionaes aos raios dos circulos a que pertencem, serão tambem as velocidades que animam as moleculas do solido proporcionaes aos mesmos raios; de modo que, si a distancia μA da molecula μ ao eixo ZZ' é tomada igual á unidade e que ω é a velocidade d'esta molecula, as velocidades das moleculas dm, dm', dm'', etc., situadas a distancias r, r', r'', etc., do eixo fixo ZZ', serão respectivamente medidas pelos productos

$$\omega r, \ \omega r' \ \omega r'', \text{ etc.}$$

A quantidade ω recebeu o nome de *velocidade angular* ou *velocidade de rotação* do solido.

Em virtude do principio de d'Alembert, devendo haver equilibrio entre as quantidades de movimento primitivas e as effectivas em sentidos contrarios, procuremos a equação d'um tal equilibrio.

A força primitiva sendo unicamente a impulsão Mv, o seu momento em relação ao eixo fixo ZZ' será o producto $Mv.p$.

Si dm, dm', dm'', etc., representam as massas das differentes moleculas do solido, as quantidades de movimento d'estas moleculas serão respectivamente medidas por

$$dm.\ \omega r,\ dm'.\ \omega r',\ dm''.\ \omega r'', \text{ etc.};$$

e os seus momentos em relação ao eixo fixo ZZ' serão

$$dm.\ \omega r^2,\ dm'.\ \omega r'^2,\ dm''.\ \omega r''^2, \text{ etc.}$$

D'onde, tendo em vista o principio de D'Alembert, teremos:

$$Mv.\ p - dm.\ \omega r^2 - dm'.\ \omega r'^2 - dm''.\ \omega r''^2, - \text{etc.} = 0;$$

ou, o que é o mesmo,

$$Mv.\ p - \omega \int r^2\, dm = 0;$$

d'onde, a velocidade angular ω será medida pela expressão seguinte:

$$\omega = \frac{Mv \cdot p}{\int r^2 dm}.$$

464. O denominador d'esta fórmula chama-se, desde Euler, *o momento de inercia* do corpo em relação ao eixo de rotação. E', pois, o momento de inercia d'um solido *a integral que exprime a somma de todos os productos que resultam da multiplicação da massa de cada elemento do corpo pelo quadrado de sua distancia ao eixo fixo, em torno do qual elle gyra*. D'est'arte, a velocidade angular do movimento de rotação uniforme d'um solido em torno d'um eixo fixo qualquer é uma fracção que tem para numerador o momento da impulsão em relação ao eixo e para denominador o momento de inercia do corpo em relação ao mesmo eixo.

Lagrange, referindo-se aos momentos de inercia, diz: *Elles são para o movimento de rotação o que as simples massas são para o movimento progressivo, porquanto é por estes momentos que é preciso dividir os momentos das forças de impulsão, para ter as velocidades de rotação em torno dos mesmos eixos*. O valor philosophico d'esta judiciosa comparação foi devidamente apreciado por A. Comte, que ainda accrescenta: *sem admittir, como na translação, medidas empiricas*.

465. A quantidade $\int r^2 dm$, tal como acaba de ser definida, só depende da fórma do corpo e da posição do eixo em torno do qual elle gyra. E' sempre uma quantidade positiva por ser formada de productos elementares que são essencialmente positivos: *productos de massas por quadrados de linhas*.

A raiz quadrada do quociente do momento de inercia d'um solido em relação a um eixo dividido pela massa total do corpo chama-se o *raio de gyração* do solido em relação ao mesmo eixo. Si, pois, chamarmos m a massa d'um ponto

material do corpo, r a sua distancia a um eixo de rotação, J o momento de inercia do corpo em relação a este eixo e K o raio de gyração correspondente, teremos:

$$J = \Sigma\, mr^2,\ K = \sqrt{\frac{J}{\Sigma\, m}}\,,$$

o signal Σ estendendo-se a toda massa do corpo.

Sejam (x', y', z'), (x'', y'', z''), etc., as coordenadas rectangulas das moleculas dm', dm'', dm''', etc., d'um solido dado. Supponhamos que o eixo de rotação seja o eixo dos z. Si r', r'', r''', etc., são as distancias d'essas moleculas a este eixo, teremos:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2,\ r''^2 = x''^2 + y''^2, \text{ etc.}$$

d'onde, o momento de inercia será

$$J = \int (x^2 + y^2)\, dm. \tag{1}$$

Supponhamos agora que o eixo de rotação seja parallelo ao eixo dos z. Effectuando um deslocamento da origem dos eixos coordenados para o ponto em que o eixo de rotação encontra o plano dos xy, é claro que o novo eixo dos z será o eixo de rotação. Representando por (a, b) as coordenadas da nova origem em relação aos eixos primitivos, a equação (1) se mudará na seguinte:

$$J = \int (x^2 + y^2)\, dm + (a^2 + b^2) \int dm + 2\, a \int x dm + 2\, b \int y\, dm.$$

Chamando M a massa do corpo supposto homogeneo e designando por δ a perpendicular commum aos dous eixos, teremos:

$$J = \int (x^2 + y^2)\, dm + \text{M}\, \delta^2 + 2\, a \int x dm + 2\, b \int y\, dm. \tag{2}$$

Suppondo que o primitivo eixo de rotação passasse pelo centro de gravidade do solido considerado, teriamos:

$$\int x dm = 0,\ \int y dm = 0\,;$$

d'onde, a equação (2) tomará a fórma seguinte :

$$J = \int (x^2 + y^2)\, dm + M\delta^2. \qquad (3)$$

O mais simples exame d'esta equação nos mostra que o centro de gravidade d'um solido gosa da propriedade notavel de tornar minimos os momentos de inercia em relação aos eixos que por elle passam. Quanto mais distante do eixo, que passa pelo centro de gravidade do solido, estiver situado o eixo que lhe é parallelo, maior será o momento de inercia do mesmo solido: *e crescerá sempre na razão da massa pelo quadrado da distancia.*

466. Em vista d'esta propriedade geral, as indagações dos momentos de inercia d'um solido reduzem-se á dos momentos em relação ás linhas que passam por seu centro de gravidade; e, uma vez achados todos estes momentos de inercia, facilmente serão conhecidos os momentos de inercia em relação a quaesquer outras linhas. Para isto bastará traçar pelo centro de gravidade uma parallela á linha proposta e tomar o momento de inercia em relação á primeira linha. Si M é a massa do solido e δ o intervallo que separa as duas linhas, ajuntando-se o producto $M\delta^2$ ao momento de inercia tomado, ter-se-ha uma somma que será o momento de inercia em relação á linha proposta.

467. A indagação dos momentos de inercia em relação ás rectas que concorrem no centro de gravidade do solido exigiria um trabalho infinito, si não existisse uma relação entre elles; de maneira que, conhecendo-se uns, os outros fossem determinados. Uma tal relação será facilmente estabelecida si conhecermos o momento de inercia do solido relativamente a um eixo fixo qualquer AB, passando pela origem A de tres eixos rectangulares fixos.

Representemos por (x, y, z) as coordenadas do ponto m do solido considerado.

Seja $mB = r$ (fig. 137) a perpendicular abaixada de m sobre AB; e designemos por φ o angulo formado pelas linhas AB e $Am = \rho$.

Sejam, finalmente, (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ os angulos que AB e Am fazem respectivamente com os tres eixos Ax, Ay, Az.

Isto posto, teremos as relações seguintes:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{4}$$

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

$$x = \rho\cos\alpha',\ y = \rho\cos\beta',\ z = \rho\cos\gamma';$$

d'onde,

$$\cos\alpha' = \frac{x}{\rho},\ \cos\beta' = \frac{y}{\rho},\ \cos\gamma' = \frac{z}{\rho};$$

portanto,

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho}\cos\alpha + \frac{y}{\rho}\cos\beta + \frac{z}{\rho}\cos\gamma;$$

ou, o que é a mesma cousa,

$$\rho\cos\varphi = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \tag{5}$$

O triangulo rectangulo mAB dá-nos :

$$r^2 = \rho^2 - \overline{AB}^2 = \rho^2 - \rho^2\cos^2\varphi;$$

d'onde, tendo em vista os valores (4) e (5), virá:

$$r^2 = x^2\,\text{sen}^2\,\alpha + y^2\,\text{sen}^2\,\beta + z^2\,\text{sen}^2\,\gamma - 2\,xy\cos\alpha\cos\beta -$$
$$- 2\,xz\cos\alpha\cos\gamma - 2\,yz\cos\beta\cos\gamma.$$

Multiplicando esta equação por dm e integrando, vem:

$$\int r^2dm = \text{sen}^2\,\alpha\int x^2dm + \text{sen}^2\,\beta\int y^2dm + \text{sen}^2\,\gamma\int z^2dm -$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta\int xydm - 2\cos\alpha\cos\gamma\int xzdm - 2\cos\beta\cos\gamma\int yzdm.$$

Fazendo, para maior simplicidade,

$$\left.\begin{array}{l} A = \int x^2dm,\ B = \int y^2dm,\ C = \int z^2dm, \\ D = \int xydm,\ E = \int xzdm,\ F = \int yzdm, \end{array}\right\} \tag{6}$$

teremos :

$$\left.\begin{array}{l} \int r^2dm\ A\,\text{sen}^2\,\alpha + B\,\text{sen}^2\,\beta + C\,\text{sen}^2\,\gamma - \\ - 2\,D\cos\alpha\cos\beta - 2\,E\cos\alpha\cos\gamma - 2\,F\cos\beta\cos\gamma. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Tal é a equação que nos permittirá conhecer o momento de inercia do solido em relação ao eixo $\overline{AB}$, quando forem conhecidas as integraes do grupo (6) e os angulos que a linha $\overline{AB}$ faz respectivamente com os tres eixos rectangulares. As integraes definidas A, B, C, D, E, F são independentes da direcção do eixo $\overline{AB}$ e referem-se sómente ás coordenadas dos differentes pontos do solido, entre certos limites. Ellas são quantidades constantes que dependem da fórma do solido e da posição que elle occupa em relação aos eixos rectangulares. Assim, *conhecidos os momentos de inercia d'um solido em relação a tres eixos coordenados e os valores das integraes D, E, F, poderemos determinar o momento de inercia do solido em relação a qualquer outro eixo fixo tirado pela origem.*

Si o ponto A, origem dos eixos rectangulares, coincide com o centro de gravidade do solido, fica estabelecida a relação que procuravamos.

168. Procuremos tambem fixar a posição do eixo $\overline{AB}$ em relação a um systema de coordenadas polares. Para isto, designemos por θ o angulo que o eixo $\overline{AB}$ faz com a sua projecção AX sobre o plano dos xy, e por ψ o angulo que AX faz com o eixo Ax. Resultarão as relações seguintes :

$$AQ = AB \cos \alpha, \quad AR = AB \cos \beta, \quad AS = AB \cos \gamma, \qquad (8)$$

por serem AQ, AR e AS as projecções de AB, respectivamente sobre cada um dos eixos coordenados. Os triangulos ABP, ARP e AQP dão-nos :

$$AP = AB \cos \theta, \quad AS = BP = AB \operatorname{sen} \theta,$$

$$AR = PQ = AP \operatorname{sen} \psi, \quad AQ = AP \cos \psi ;$$

d'onde,

$$AS = AB \operatorname{sen} \theta, \quad AR = AB \operatorname{sen} \psi \cos \theta, \quad AQ = AB \cos \psi \cos \theta ;$$

d'onde, por causa das relações (8), teremos:

$$\cos \gamma = \operatorname{sen} \theta, \quad \cos \beta = \operatorname{sen} \psi \cos \theta, \quad \cos \alpha = \cos \psi \cos \theta ; \qquad (9)$$

e portanto,

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}^2\,\alpha &= 1 - \cos^2\psi\cos^2\theta, \\ \text{sen}^2\,\beta &= 1 - \text{sen}^2\psi\cos^2\theta, \\ \text{sen}^2\,\gamma &= 1 - \text{sen}^2\,\theta. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Substituindo os valores dados pelas equações (9) e (10) na equação (7), resultará:

$$\left.\begin{aligned} \int r^2 dm = (A + B) - (A\cos^2\psi + B\,\text{sen}^2\psi - C)\cos^2\theta - \\ - 2\,D\cos^2\theta\cos\psi\,\text{sen}\,\psi - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,(E\cos\psi + F\,\text{sen}\,\psi) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Tal é a equação procurada, cujo destino é o mesmo que o da equação (7).

469. Si o systema de eixos rectangulares fixos, ao qual referimos arbitrariamente o solido, fosse tal que as tres integraes D, E, F não existissem, muito simples seriam as indagações dos momentos de inercia em relação a um eixo de rotação dirigido d'uma maneira qualquer no espaço. N'este caso, os eixos rectangulares fixos que preenchessem essa condição tomariam o nome de *eixos principaes do corpo*. Assim, admittindo que sejam nullas as referidas integraes, as equações (7) e (11) tomariam a fórma seguinte:

$$\left.\begin{aligned} \int r^2 dm &= A\,\text{sen}^2\,\alpha + B\,\text{sen}^2\,\beta + C\,\text{sen}^2\,\gamma, \\ \int r^2 dm &= (A + B) - (A\cos^2\psi + B\,\text{sen}^2\psi - C)\cos^2\theta. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

470. Agora façamos ver que, *conhecendo-se os momentos de inercia d'um solido em relação aos tres eixos principaes tomados para eixos coordenados fixos, poderemos achar o momento de inercia do mesmo solido em relação a qualquer outra recta referida aos mesmos eixos.*

De facto, admittindo que os eixos principaes do solido sejam Ax, Ay, Az, os momentos de inercia relativos a estes serão:

$$\left.\begin{aligned} \int(y^2 + z^2)\,dm &= \int y^2 dm + \int z^2 dm = B + C = L, \\ \int(x^2 + z^2)\,dm &= \int x^2 dm + \int z^2 dm = A + C = M, \\ \int(x^2 + y^2)\,dm &= \int x^2 dm + \int y^2 dm = A + B = N. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Conhecidos os valores de L, M, N, as tres equações precedentes serão:

$$B + C = L, \quad A + C = M, \quad A + B = N;$$

d'onde,

$$\begin{aligned} L &= M + N - 2A, \\ M &= L + N - 2B, \\ N &= L + M - 2C, \end{aligned}$$

equações que nos mostram, por serem as quantidades A, B, C sempre positivas, a propriedade seguinte: *cada um dos tres momentos de inercia principaes é menor que a somma dos dous outros.*

Das equações precedentes deduz-se:

$$A = \frac{\;}{\;}(N + M - L), \quad B = \frac{1}{2}(N + L - M),$$

$$C = \frac{1}{2}(L + M - N).$$

Substituindo estes valores nas equações (12) resultarão as equações seguintes:

$$\left.\begin{aligned} \int r^2 dm &= L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma, \\ \int r^2 dm &= (L\cos^2\psi + M\operatorname{sen}^2\psi - N)\cos^2\theta + N, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

equações que demonstram a nossa proposição.

471. Conforme acabámos de ver, uma simples consideração sobre a escolha conveniente d'um systema de eixos rectangulares fixos, tirados por um ponto qualquer do espaço, nos levou ao conhecimento de que o momento de inercia d'um solido em relação ao eixo fixo de rotação, dirigido d'uma maneira qualquer, só depende das integraes que nos dão os momentos de inercia do mesmo solido, em relação a esse systema de eixos rectangulares fixos, e das constantes que determinam a posição do eixo de rotação.

Não é necessario meditarmos muito sobre a possibilidade d'uma tal escolha: as fórmulas da theoria da transposição dos eixos, da *Geometria algebrica*, poderão sempre permittir tal simplificação.

Com effeito, uma rotação indeterminada de eixos rectangulares, da mesma origem, nos transformaria a equação (7) em uma outra, na qual poderiamos dispôr das constantes angulares introduzidas pelas respectivas fórmulas de transposição. D'este modo, annullando os coefficientes das tres integraes

$$D = \int xydm, \ E = \int xzdm, \ F = \int yzdm,$$

as equações de condição, assim estabelecidas, permittiriam necessariamente o conhecimento dos valores dos angulos que determinariam a posição dos novos eixos. Portanto, os eixos principaes d'um solido invariavel serão definidos algebricamente segundo a sua propriedade *de annullar as tres integraes geraes que resultam do producto de cada molecula por duas das coordenadas relativas aos mesmos eixos*; isto é, que :

$$\int xydm = 0, \ \int xzdm = 0, \ \int yzdm = 0.$$

472. Lancemos mão da primeira das equações (14). Si n'esta equação substituirmos o valor de $\cos^2\alpha$ dado pela expressão

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

resultará :

$$\int r^2dm = L + (M-L)\cos^2\beta + (N-L)\cos^2\gamma. \qquad (15)$$

Examinando esta equação, vemos que :

1°. Si L é menor que M e N, o momento de inercia $\int r^2dm$ será maior que L ; isto é, que todos os momentos de inercia relativos a eixos situados de uma maneira qualquer no espaço e que passam pela origem das coordenadas, são maiores que L; ou que L será o *minimum* dos momentos de inercia do solido.

2°. Si L é maior que M e N, o momento de inercia $\int r^2dm$ será menor que L; e, portanto, todos os momentos de inercia definidos pela integral $\int r^2dm$ serão menores que

L; o que quer dizer que L será o *maximum* dos momentos de inercia do solido.

3º. Si L=N, a equação (15) se reduzirá á fórma:

$$\int r^2 dm = L + (M-L)\cos^2\beta;$$

e por ser este valor independente dos angulos α e γ, todos os momentos de inercia do solido serão iguaes, em relação aos eixos traçados pela origem das coordenadas e que fazem o mesmo angulo β com o eixo dos y.

4º. Si, finalmente, L=M=N, a equação (15) reduz-se á fórma:

$$\int r^2 dm = L;$$

isto é, que todos os momentos de inercia do solido em relação a eixos quaesquer serão iguaes entre si.

Do exposto fica conhecida a *propriedade geometrica* dos eixos principaes, formulada assim: dos tres momentos de inercia relativos aos eixos principaes d'um solido, um é o *maximum* e um outro é o *minimum*.

473. Emana d'esta propriedade um segundo methodo para a determinação dos eixos principaes d'um corpo. Com effeito, si estes eixos gosam da propriedade de *maximum* e *minimum*, procuremos dar ao eixo fixo de rotação AB uma tal direcção, que o momento de inercia em relação a este eixo seja um *maximum* ou um *minimum*.

Para isto, consideremos a equação (11),

$$\left.\begin{array}{l}\int r^2 dm = (A+B) - (A\cos^2\psi + B\,\mathrm{sen}^2\psi - C)\cos^2\theta - \\ -2D\cos^2\theta\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi - 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,(E\cos\psi + F\,\mathrm{sen}\,\psi).\end{array}\right\}\quad(11)$$

Em virtude do principio de Kepler, estabelecido na theoria dos maximos e minimos, igualemos separadamente a zero os coefficientes differenciaes de primeira ordem de $\int r^2 dm$, em relação á ψ e a θ.

Assim, differenciando a equação (11), em relação a ψ e a θ, teremos:

$$\frac{d.\int r^2 dm}{d\psi} = 2\cos\theta\,[\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\theta\,(A-B) +$$
$$+ D\cos\theta\,(\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\psi) - \operatorname{sen}\theta\,(F\cos\psi - E\operatorname{sen}\psi)\,],$$

$$\frac{d.\int r^2 dm}{d\theta} = 2\,[\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,(A\cos^2\psi + B\operatorname{sen}^2\psi - C + 2D\operatorname{sen}\psi\cos\psi) +$$
$$+ (\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\,(E\cos\psi + F\operatorname{sen}\psi)\,];$$

d'onde, annullando separadamente estes dois coefficientes differenciaes, teremos:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\theta\,(A-B) + D\cos\theta\,(\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\psi) - \\ \qquad - \operatorname{sen}\theta\,(F\cos\psi - E\operatorname{sen}\psi) = 0, \\ 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,(A\cos^2\psi + B\operatorname{sen}^2\psi - C + 2D\operatorname{sen}\psi\cos\psi) + \\ \qquad + 2\,(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\,(E\cos\psi + F\operatorname{sen}\psi) = 0;\end{array}\right\}\ (16)$$

ou, o que é a mesma cousa,

$$\operatorname{sen}\psi\cos\psi\,(A-B) + D\,(\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\psi) - \operatorname{tg}\theta\,(F\cos\psi - E\operatorname{sen}\psi) = 0,$$
$$\operatorname{sen}2\theta\,(A\cos^2\psi + B\operatorname{sen}^2\psi - C + 2D\operatorname{sen}\psi\cos\psi) -$$
$$- 2\cos 2\theta\,(E\cos\psi + F\operatorname{sen}\psi) = 0;$$

d'onde facilmente resultam as expressões seguintes:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(A-B)\operatorname{sen}\psi\cos\psi + D\,(\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\psi)}{F\cos\psi - E\operatorname{sen}\psi}, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\,(E\cos\psi + F\operatorname{sen}\psi)}{A\cos^2\psi + B\operatorname{sen}^2\psi - C + 2D\operatorname{sen}\psi\cos\psi}. \quad (18)$$

Os valores dos angulos θ e ψ que verificarem simultaneamente estas duas expressões determinarão a posição dos eixos que gozarão da propriedade de possuir o *maximum* ou o *minimum* dos momentos de inercia do solido.

474. Procuremos determinar os valores dos angulos θ e ψ; e, para isto, eliminemos θ, segundo o modo seguido por Prony.

Seja a relação trigonometrica

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

Substituindo n'esta relação os valores (17) e (18) teremos:

$$\frac{(E \cos \psi + F \operatorname{sen} \psi)}{A \cos^2 \psi + B \operatorname{sen}^2 \psi - C + 2 D \operatorname{sen} \psi \cos \psi} =$$

$$= \frac{[(A - B) \operatorname{sen} \psi \cos \psi + D (\operatorname{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)] (F \cos \psi - E \operatorname{sen} \psi)}{(F \cos \psi - E \operatorname{sen} \psi)^2 - [(A - B) \operatorname{sen} \psi \cos \psi + D (\operatorname{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)]^2},$$

d'onde,

$$(E \cos \psi + F \operatorname{sen} \psi) (F \cos \psi - E \operatorname{sen} \psi)^2 =$$
$$= (E \cos \psi + F \operatorname{sen} \psi) [(A - B) \operatorname{sen} \psi \cos \psi + D (\operatorname{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)]^2 +$$
$$+ [(A - B) \operatorname{sen} \psi \cos \psi + D (\operatorname{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)] (F \cos \psi - E \operatorname{sen} \psi) \times$$
$$\times (A \cos^2 \psi + B \operatorname{sen}^2 \psi - C + 2 D \operatorname{sen} \psi \cos \psi).$$

Por ser

$$(A - B) \operatorname{sen} \psi \cos \psi + D (\operatorname{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)$$

um factor commum ao segundo membro da equação precedente, ella se reduzirá á fórma:

$$(E \cos \psi + F \operatorname{sen} \psi) (F \cos \psi - E \operatorname{sen} \psi)^2 =$$
$$= [(A - B) \operatorname{sen} \psi \cos \psi + D (\operatorname{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)] \times$$
$$\times [(E \cos \psi + F \operatorname{sen} \psi) [(A - B) \operatorname{sen} \psi \cos \psi + D (\operatorname{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)] +$$
$$+ (F \cos \psi - E \operatorname{sen} \psi) (A \cos^2 \psi + B \operatorname{sen}^2 \psi - C + 2 D \operatorname{sen} \psi \cos \psi)];$$

ou, o que é a mesma cousa,

$$(E \cos \psi + F \operatorname{sen} \psi) (F \cos \psi - E \operatorname{sen} \psi)^2 =$$
$$= [(A - B) \operatorname{sen} \psi \cos \psi + D (\operatorname{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)] \times$$
$$\times [\cos^2 \psi (AF - DE) + \operatorname{sen}^2 \psi \cos \psi (AF - DE) + \operatorname{sen}^5 \psi (DF - BE) +$$
$$+ \operatorname{sen} \psi \cos^2 \psi (DF - BE) + EC \operatorname{sen} \psi - CF \cos \psi];$$

d'onde, por causa dos factores communs e por ser

$$\text{sen}^2 \psi + \cos^2 \psi = 1,$$

teremos:

$$(E \cos \psi + F \text{ sen } \psi)(F \cos \psi - E \text{ sen } \psi)^2 =$$
$$= [(A - B) \text{ sen } \psi \cos \psi + D (\text{sen}^2 \psi - \cos^2 \psi)] \times$$
$$\times [(AF - DE - CF) \cos \psi + (DF - BE + CE) \text{ sen } \psi].$$

Agora, por ser

$$\text{sen } \psi = \cos \psi \text{ tg } \psi,$$

resultará:

$$(E \cos \psi + F \cos \psi \text{ tg } \psi)(F \cos \psi - E \cos \psi \text{ tg } \psi)^2 =$$
$$= [(A - B) \cos^2 \psi \text{ tg } \psi + D (\cos^2 \psi \text{ tg}^2 \psi - \cos^2 \psi)] \times$$
$$\times [(AF - DE - CF) \cos \psi + (DF - BE + CE) \cos \psi \text{ tg } \psi].$$

Dividindo os dous membros d'esta equação por $\cos^3 \psi$, virá:

$$(E + F \text{ tg } \psi)(F - E \text{ tg } \psi)^2 = [(A - B) \text{ tg } \psi + D (\text{tg}^2 \psi - 1)] \times$$
$$\times [(AF - DE - CF) + (DF - BE + CE) \text{ tg } \psi];$$

d'onde, finalmente, effectuando as operações indicadas, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} [(E^2 - D^2) F + (B - C) DE] \text{ tg}^3 \psi + [E^3 - 2 EF^2 + D^2 E + \\ + (B - 2A + C) DF - (B - A)(B - C) E] \text{ tg}^2 \psi + \\ + [F^3 - 2 FE^2 - D^2F + (A - 2B + C) DE - \\ - (A - B)(A - C) F] \text{ tg } \psi + [(F^2 - D^2) E + (A - C) DF] = 0. \end{array}\right\} (19)$$

Esta equação, cuja incognita unica é $\text{tg}\psi$, nos dará tres valores unicos para o angulo ψ; e a relação (17) nos daria os valores correspondentes de θ.

Fica assim conhecido o meio de determinação dos angulos θ e ψ.

475. Uma das raizes da equação (19) correspondendo ao *maximum* dos momentos de inercia, uma outra correspondendo ao *minimum*, é claro que as tres soluções d'essa equação serão reaes; e a terceira raiz, tambem satisfazendo ás condições dadas pelas equações (16), só corresponderá ao *maximum* ou *minimum* dos momentos de inercia quando existirem raizes iguaes.

476. As tres raizes da equação (19) determinam os tres eixos principaes, como acabámos de provar; mas, para que esta determinação fique mais clara ao nosso espirito, provemos que ellas verificam as equações

$$\int xydm = 0, \int xzdm = 0, \int yzdm = 0.$$

Para isto, mudemos as coordenadas (x, y, z) em novas coordenadas (x', y', z'), fixadas da maneira seguinte:

1°. O eixo AB (fig. 138), dirigido de uma maneira qualquer no espaço, será o novo eixo dos x', sendo θ o angulo que o eixo AB faz com a sua projecção AX sobre o plano dos xy e ψ o angulo d'esta projecção com o eixo Ax.

2°. O eixo Ay' situado no plano dos xy, perpendicularmente á recta AX, será o novo eixo dos y'; sendo Ay' perpendicular ao plano XA$x'z$, é claro que será perpendicular ao eixo Ax'.

3°. O eixo Az' será dirigido perpendicularmente ao plano y'Ax'.

Isto posto, si considerarmos AX, AY e AZ como sendo os primitivos eixos dos X, dos Y e dos Z, é claro que, para passarmos d'estes eixos para os eixos Ax, Ay, Az, deveremos lançar mão das seguintes fórmulas de transposição dos eixos, estabelecidas na *Geometria algebrica*:

$$X = x \cos \psi + y \operatorname{sen} \psi, \; Y = y \cos \psi - x \operatorname{sen} \psi, \; Z = z; \qquad (20)$$

mas, si quizermos passar do systema de eixos Ax', Ay', Az' para o systema AX, AY, AZ, as fórmulas convenientes serão:

$$x' = X \cos \theta + Z \operatorname{sen} \theta, \; y' = Y, \; z' = Z \cos \theta - X \operatorname{sen} \theta. \qquad (21)$$

Ora, eliminando X, Y, Z das equações (20) e (21), teremos as fórmulas seguintes:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos\psi \cos\theta + y \operatorname{sen}\psi \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta, \\ y' &= y \cos\psi - x \operatorname{sen}\psi, \\ z' &= z \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta \cos\psi - y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Suppondo que o solido fosse primeiramente referido ao systema de eixos Ax', Ay', Az', os valores dados pelas equações (22) seriam os que deveriam ser substituidos nas respectivas equações para que o mesmo solido fosse referido ao systema Ax, Ay, Az; e esta proposição só não seria verdadeira si esses dous systemas de eixos não fossem de coordenadas rectangulas e da mesma origem A.

Agora, procuremos os valores das integraes que definem algebricamente os eixos principaes do solido.

Para termos o valor de $\int x'y'dm$, multipliquemos as duas primeiras das equações (22). Resultará:

$$x'y' = -\operatorname{sen}\psi \cos\psi \cos\theta\,(x^2 - y^2) - xy \cos\theta\,(\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\psi) + \\ + \operatorname{sen}\theta\,(xz \operatorname{sen}\psi - yz \cos\psi);$$

d'onde,

$$\int x'y'dm = -\operatorname{sen}\psi \cos\psi \cos\theta\,(A - B) - D \cos\theta\,(\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\psi) + \\ + \operatorname{sen}\theta\,(F \cos\psi - E \operatorname{sen}\psi).$$

Analogamente teremos:

$$\int x'z'dm = -\cos\theta \operatorname{sen}\theta\,(A \cos^2\psi + B \operatorname{sen}^2\psi - C + 2D \operatorname{sen}\psi \cos\psi) - \\ - (\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)\,(E \cos\psi + F \operatorname{sen}\psi).$$

Comparando-se estes valores de $\int x'y'dm$ e $\int x'z'dm$, respectivamente, com os primeiros membros das equações (16), multiplicados por (-1), vê-se, facilmente, que elles são iguaes. Resulta d'aqui que, si dessemos a ψ e θ exactamente os valores que verificam as equações (16), teriamos:

$$\int x'y'dm = 0, \quad \int x'z'dm = 0.$$

Os valores de ψ que verificam as equações (16) são precisamente os que são dados pelas raizes da equação (19); e a

equação (17) nos dará os tres valores de θ correspondentes aos de ψ. Assim, uma das raizes da equação (19) determinando a posição do eixo dos x', podemos suppôr que as outras duas raizes determinarão os eixos dos y' e dos z'; d'onde, tambem teremos

$$\int y'z'dm = 0.$$

E as tres integraes D, E, F sendo nullas, os tres eixos coordenados serão os eixos principaes do solido; mas esta conclusão resulta da hypothese de que as tres raizes da equação (19) determinam direcções rectangulares; e vamos provar que tal supposição deve necessariamente ter logar.

477. Com effeito, suppondo que um dos eixos principaes do solido é o eixo dos x, teremos:

$$D = 0, E = 0;$$

d'onde, as expressões (17) e (18) se mudarão nas seguintes:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(A - B) \operatorname{sen} \psi}{F}, \tag{23}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 F \operatorname{sen} \psi}{A \cos^2 \psi + B \operatorname{sen}^2 \psi - C}. \tag{24}$$

Substituindo estes valores na relação trigonometrica

$$\operatorname{tg} 2\theta - \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta},$$

teremos:

$$F^2 = (A - B)(A - C),$$

equação que não poderá determinar ψ por não conter esta variavel e que, portanto, será uma simples *equação de condição*; mas a equação

$$\operatorname{sen} \psi \cos \psi (A - B) - \operatorname{tg} \theta \, F \cos \psi = 0,$$

d'onde resultou a expressão (23), nos dá:

$$\cos \psi = 0 ;$$

d'onde,

$$\psi = 90^{\circ} ;$$

portanto,

$$\operatorname{sen} \psi = 1 .$$

Substituindo agora estes valores na expressão (24), teremos:

$$\operatorname{tg} 2 \theta = \frac{2 F}{B - C} ;$$

d'onde,

$$2 \theta = \operatorname{arctg} \frac{2 F}{B - C} ;$$

logo,

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 F}{B - C} . \qquad (25)$$

Ora, por ser

$$\operatorname{tg} 2 \theta = \operatorname{tg} (180 + 2 \theta),$$

teremos tambem

$$\operatorname{tg} (180 + 2 \theta) = \frac{2 F}{B - C} ;$$

d'onde,

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 F}{B - C} - 90^{\circ} . \qquad (26)$$

Chamando θ_1 e θ_2 os dous valores de θ dados pelas equações (25) e (26), vê-se facilmente que

$$\theta_1 - \theta_2 = 90^{\circ} ; \qquad (27)$$

isto é, que os dous valores de θ differem de 90°. Assim, si um dos eixos principaes do solido é o eixo dos x, os outros dous lhe serão perpendiculares, em vista da relação (27) e de ser $\psi = 90^{\circ}$.

178. Occupemo-nos agora da *propriedade dynamica* dos eixos principaes d'um corpo solido.

No movimento de rotação uniforme d'um corpo solido em torno d'um eixo fixo, as forças centrifugas de seus differentes pontos exercem pressões sobre o eixo. Para as determinarmos, consideremos o elemento dm do solido referido a tres eixos rectangulares fixos Ax, Ay, Az. Chamando r a distancia d'esta molecula ao eixo Az e ω a sua velocidade angular, é claro que $r\ \omega^2\ dm$ será a medida da força centrifuga d'esse elemento dm. Por ser esta força dirigida segundo o prolongamento de r, os cosenos dos angulos que respectivamente ella faz com os tres eixos coordenados serão $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ *e zero*. Mudando o ponto de applicação d'esta força para o ponto em que a sua direcção encontra o eixo Az, poderemos substituil-a por suas componentes $x\ \omega^2\ dm$ e $y\ \omega^2\ dm$ situadas nos planos dos xz e yz e respectivamente parallelas aos eixos Ax e Ay.

Analogamente procedendo para com todas as demais moleculas do solido, concluiremos que o eixo Az será solicitado segundo as direcções Ax e Ay por forças que terão para valores

$$\omega^2 \int xdm \text{ e } \omega^2 \int ydm.$$

Chamando x_1 e y_1 as abscissas do centro de gravidade e M a massa do solido, as quantidades precedentes serão respectivamente iguaes ás seguintes :

$$\omega^2\ Mx_1 \text{ e } \omega^2\ My_1.$$

Designando as distancias d'estas duas pressões ao plano dos xy, por z' e z'', teremos :

$$z' = \frac{\int xzdm}{Mx_1},\quad z'' = \frac{\int yzdm}{My_1}. \qquad (28)$$

Si $z' = z''$, as duas pressões $\omega^2\ Mx_1$ e $\omega^2\ My_1$ terão o mesmo ponto de applicação no eixo dos z e poderão reduzir-se a uma só pressão dirigida perpendicularmente a este eixo

e situada em um plano que passa pelo centro de gravidade do solido; e o valor ou grandeza d'esta pressão será $\omega^2 Mr_1$, r_1 designando a distancia do centro de gravidade do corpo ao eixo Az.

Quando este eixo fôr um dos tres eixos principaes do solido, que concorrem no ponto A, é claro que teremos:

$$\int xzdm = 0, \int yzdm = 0;$$

d'onde, as equações (28) nos darão

$$z' = 0 \text{ e } z'' = 0;$$

isto é, que a pressão supportada pelo eixo Az durante a rotação do solido passará pelo ponto A; e, si este ponto fôr fixo, a pressão será destruida pela sua resistencia e o eixo ficará immovel.

Assim, *qualquer que seja o ponto fixo A pertencente a um corpo solido, ou ligado invariavelmente a este corpo, ha sempre tres rectas rectangulares, passando por este ponto, em torno das quaes o solido póde gyrar, sem que estes eixos de rotação se desloquem e como si elles fossem inteiramente immoveis*. E' esta a *propriedade dynamica* dos eixos principaes, que tem logar no movimento de rotação uniforme d'um solido invariavel; e vamos provar que tal propriedade é exclusiva dos eixos principaes.

Com effeito, si a recta Az não é um dos eixos principaes do solido, que se cortam no ponto fixo A, não poderemos sempre reduzir as expressões

$$\omega^2 Mx_1 \text{ e } \omega^2 My_1$$

a uma unica pressão; e si, por ser $z' = z''$, estas pressões se reduzem a uma só pressão, é claro que esta força não passará pelo ponto fixo A; d'onde, será necessaria a existencia d'um segundo ponto fixo, afim de que as pressões sejam destruidas e o eixo seja immovel durante a rotação uniforme do solido, o que só acontecerá si Az fôr um dos tres eixos principaes.

479. Sendo Az um dos eixos principaes que concorrem no centro de gravidade G do solido, vamos provar que esta recta será tambem um dos eixos principaes do mesmo solido, n'um ponto qualquer A que pertença á sua direcção.

Para isto, seja γ a distancia do centro de gravidade ao ponto A, origem dos eixos Ax, Ay, Az. Conservando a direcção d'estes eixos rectangulares, desloquemos a origem A para o centro G; e como (x, y, z) são as coordenadas da molecula dm, é claro que estas coordenadas se mudarão em $(x, y, z - \gamma)$; d'onde, tendo em vista a definição dos eixos principaes, resultará:

$$\left.\begin{aligned} \int x\,(z-\gamma)\,dm &= \int xzdm - \gamma \int xdm = 0, \\ \int y\,(z-\gamma)\,dm &= \int yzdm - \gamma \int ydm = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Ora, por ser o ponto G situado sobre o eixo Az, teremos:

$$\int xdm = 0, \int ydm = 0, \qquad (30)$$

d'onde, as equações (29) nos darão:

$$\int xzdm = 0, \int yzdm = 0; \qquad (31)$$

isto é, que Az será um dos tres eixos principaes concurrentes em A.

Si as duas equações (30) e as duas equações (31) teem logar simultaneamente, conclue-se facilmente das equações

$$\int xdm = 0, \text{ e } \int xzdm = 0$$

que as pressões parallelas e situadas no plano dos xz se reduzem a duas forças iguaes e directamente oppostas; e das equações

$$\int ydm = 0 \text{ e } \int xzdm = 0$$

emana uma conclusão analoga, relativa ás forças situadas no plano dos yz.

Assim, *quando um corpo gyra em torno d'um dos tres eixos principaes que se cortam em seu centro de gravidade, as forças centrifugas de todos os seus pontos não produzem pressões sobre o eixo de rotação; e si o movimento começa em torno d'um tal eixo, elle continuará indefinidamente, sem que essa recta tenha nenhum ponto fixo, suppondo-se sempre que forças continuas não actuem sobre o movel.*

480. Como vimos, a medida do momento de inercia d'um solido invariavel em relação a um eixo fixo qualquer reduz-se á determinação dos tres momentos de inercia relativos aos eixos principaes que se cortam no centro de gravidade do solido; e, então, a questão fica sendo um problema do dominio do calculo integral. Para que se faça uma idéa exacta do modo de avaliação dos momentos de inercia, vamos escolher alguns exemplos proprios e uteis.

481. PRIMEIRO EXEMPLO.— Consideremos um parallelipipedo rectangulo e homogeneo. Supponhamos que (a, b, c) sejam as tres arestas contiguas d'este solido e sejam os eixos coordenados situados nas direcções d'estas arestas. Imaginemos que cada uma d'estas linhas seja dividida em numero infinito de partes infinitamente pequenas; imaginemos mais que por todos os pontos de divisão sejam traçados planos parallelos ás faces do solido; e resultarão tres systemas de planos que decomporão o parallelipipedo rectangulo considerado em elementos infinitesimaes da mesma fórma geometrica.

Designando por dm a massa do elemento cujas coordenadas são (x, y, z), é claro que

$$dm = \rho\, dxdydz,$$

sendo ρ a constante que exprime a densidade do parallelipipedo.

Assim, o momento de inercia em relação á aresta c, situada na direcção do eixo dos z, será dado pela expressão seguinte:

$$C = \rho \int\int\int (x^2 + y^2)\, dxdydz.$$

Integrando entre os limites :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$
$$x = a, \quad x = b, \quad z = c,$$

teremos :

$$C = \frac{1}{3} \rho \, (a^3bc + ab^3c);$$

e si M designa a massa inteira do solido,

$$C = \frac{1}{3} M \, (a^2 + b^2).$$

Analogamente teremos :

$$B = \frac{1}{3} M \, (a^2 + c^2),$$

$$A = \frac{1}{3} M \, (b^2 + c^2),$$

para as expressões dos valores dos momentos de inercia do solido, relativamente ás arestas b e a.

482. SEGUNDO EXEMPLO.— Seja o ellipsoide homogeneo definido pela equação rectilinea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{33}$$

sendo $2a$, $2b$, $2c$ os comprimentos dos tres diametros principaes do solido, que supporemos situados na direcção de tres eixos rectangulares fixos Ax, Ay, Az. O momento de inercia d'este corpo em relação ao eixo Az será dado pela expressão (32), a qual será integrada da maneira seguinte:

Suppondo x e y como constantes e integrando em relação á variavel z, teremos :

$$C = \rho \, x^2 z \int dx \int dy + \rho \, y^2 z \int dx \int dy + \text{const.}$$

Para determinarmos a constante d'esta integração, resolvamos a equação (33) em relação a z. Virá:

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,;$$

d'onde,

$$C = \rho\, x^2 c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \int dx \int dy \;+$$

$$+ \rho\, y^2 c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \int dx \int dy + \text{const.},$$

e

$$C = -\rho\, x^2 c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \int dx \int dy \;-$$

$$- \rho\, y^2 c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \int dx \int dy + \text{const.}\,;$$

d'onde,

$$C = 2 \rho c \left[\int dx\, x^2 \int dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}} \;+ \right.$$

$$\left. + \int dy\, y^2 \int dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right].$$

N'esta equação tomemos a integral

$$\int dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,;$$

que deve ser considerada entre os limites da variavel y dados pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que pertence á secção do ellipsoide determinada pelo plano dos xy. Resolvendo esta equação, temos :

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm r,$$

sendo

$$r = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Portanto, a integral precedente será escripta da fórma seguinte :

$$\frac{1}{b}\int_{-r}^{+r} dy \sqrt{r^2 - y^2} \; ;$$

e como

$$\int_{-r}^{+r} dy \sqrt{r^2 - r^2}$$

tem para valor a metade da área do circulo cujo raio é r, a expressão precedente se reduzirá simplesmente á

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{\pi r^2}{2} \; ;$$

ou, substituindo o valor de r, á

$$\frac{\pi}{2} b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Assim, teremos :

$$\int dx\, x^2 \int dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{\pi}{2} b \int dx \left(x^2 - \frac{x^4}{a^2}\right);$$

d'onde, integrando em relação á variavel x e entre os limites $(-a)$ e $(+a)$, resultará :

$$\int dx\, x^2 \int dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{2\pi}{15} a^3 b.$$

Analogamente teremos :

$$\int dy\, y^2 \int dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{2\pi}{15} ab^3 \; ;$$

d'onde,

$$C = 2 \rho c \left(\frac{2\pi}{15} a^3 b + \frac{2\pi}{15} ab^3\right);$$

ou, finalmente,

$$C = \frac{4\pi}{15} \rho abc (a^2 + b^2).$$

Designando por M a massa do ellipsoide, teremos :

$$M = \frac{4 \pi \rho abc}{3};$$

d'onde,

$$C = \frac{M}{5} (a^2 + b^2).$$

Analogamente teremos os momentos de inercia do solido em relação aos eixos Ay e Az. Representando-os por B e A, resultará :

$$B = \frac{M}{5} (a^2 + c^2), \quad A = \frac{M}{5} (b^2 + c^2).$$

483. TERCEIRO EXEMPLO.— Supponhamos que queremos conhecer a expressão do valor do momento de inercia d'uma esphera homogenea em relação a qualquer dos seus diametros. Para isto, bastará que nas fórmulas precedentes façamos

$$a = b = c = r,$$

Ter-se-ha

$$A = B = C = \frac{2M}{5} r^2.$$

484. QUARTO EXEMPLO.— Determinemos agora o momento de inercia d'um solido homogeneo de revolução.

Suppondo que o eixo dos x seja o do solido, o momento de inercia em relação a esta recta será conhecido da maneira seguinte:

Seja (fig. 139) CC' a curva que, gyrando em torno do eixo dos x, produz a superficie do solido de revolução considerado. Supponhamos que MP e M'P' sejam duas ordenadas infinitamente proximas e que NKK'N' seja um rectangulo comprehendido entre estas duas ordenadas.

Isto posto, façamos :

$$PN = u, \quad AP = x;$$

d'onde,

$$NKK'N' = dudx.$$

Este rectangulo, gyrando em torno do eixo Ox, produz um solido de revolução cujo volume será

$$\pi (u + du)^2 dx - \pi u^2 dx = 2\pi ududx \; ;$$

e cujo momento de inercia será

$$5 \pi \rho ududxu^2,$$

ρ sendo a constante que exprime a densidade do solido.

Conhecido este momento de inercia, facilmente calcularemos o do solido produzido pela revolução de PMM'P'. Este momento de inercia será expresso por

$$2 \pi \int_o^z \rho u^3 dudx;$$

ou, o que é a mesma cousa, por

$$\frac{\pi}{2} \rho z^4 dx;$$

d'onde, o momento de inercia do solido produzido pela revolução de ACC'B em torno do eixo dos x será:

$$A = \frac{\pi}{2} \rho \int_a^b z^4 dx, \qquad (34)$$

sendo a e b as abscissas dos pontos C e C'.

Quando a geratriz fôr uma recta passando pela origem das coodernadas e fazendo um angulo α com o eixo dos x, a sua equação será

$$z = \text{tg}\, \alpha \cdot x.$$

Substituindo este valor na equação (34), vem:

$$A = \frac{\pi}{2} \rho \int_a^b \text{tg}^4 \alpha\, x^4 dx;$$

d'onde, integrando, resulta :

$$A = \frac{\pi}{10} \rho\, \text{tg}^4 \alpha (b^5 - a^5).$$

Tal é a expressão da medida do momento de inercia d'um tronco de cône em relação a seu eixo de figura. Si chamarmos r e R os raios de suas bases e h a altura do solido, virá:

$$r = a \operatorname{tg} \alpha, \; R = b \operatorname{tg} \alpha, \; h = b - a;$$

d'onde,

$$A = \frac{1}{10} \pi \rho h (R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4).$$

Si o solido é um cône recto circular, é claro que $r = 0$; chamando M a massa d'esse solido, teremos:

$$M = \frac{1}{3} \pi \rho h R^2;$$

d'onde,

$$A = \frac{3}{10} MR^2.$$

Si, finalmente, o tronco de cône muda-se em um cylindro, é evidente que $r = R$; e sendo M a massa d'este solido, virá:

$$M = \pi \rho h R^2;$$

d'onde,

$$A = \frac{1}{2} MR^2.$$

Muitas outras avaliações uteis poderiamos fazer; mas os exemplos que vimos de considerar darão uma idéa exacta da marcha a seguir-se em qualquer caso particular.

485. Movimento de rotação variado.— Para estabelecermos a fórmula que nos dá a medida da velocidade angular no movimento de rotação variado, em torno de um eixo fixo, supponhamos que differentes forças acceleratrizes applicadas a um solido invariavel o façam gyrar em torno do eixo dos z (fig. 140).

N'este movimento um ponto qualquer m do solido descreverá uma circumferencia de circulo em torno do eixo Az; e o plano d'esta curva será perpendicular ao eixo no ponto c. Designemos por φ a força acceleratriz P applicada em m e por α o angulo que ella faz com a tangente mT.

Decomponhamos a força φ nas tres seguintes: uma, parallela ao eixo fixo; outra, dirigida segundo o raio mc, e a terceira dirigida segundo a tangente á trajectoria no ponto m. Ora, as duas primeiras não terão acção sobre o movel, pois que uma é destruida pela resistencia do eixo e a outra pela resistencia do centro c; logo, só teremos de considerar a força tangencial, cuja medida será expressa por $\varphi \cos \alpha$.

Seja ω a velocidade angular no fim do tempo t e seja r a distancia mc da molecula dm ao eixo fixo Az. No fim do tempo t a velocidade de dm será $\omega\, r$; e no instante dt esta velocidade terá recebido o accrescimo devido á acção da força acceleratriz. Si dm fosse um ponto livre, a força tangencial $\varphi \cos \alpha$ lhe imprimiria no instante dt a velocidade $\varphi \cos \alpha .\, dt$; portanto, dm, no fim do tempo $(t + dt)$, teria a velocidade $(\omega r + \varphi \cos \alpha .\, dt)$; mas, como dm é uma molecula do solido, a sua velocidade effectiva será, no tempo $(t + dt)$, igual á

$$\omega\, r + rd\, \omega;$$

d'onde, no fim do tempo $(t + dt)$, a quantidade de movimento effectiva da molecula dm será

$$(\omega\, r + rd\, \omega)\, dm.$$

Isto posto, todas estas considerações poderiam ser feitas relativamente ás demais moleculas do solido; d'onde, as quantidades de movimento que teriam logar si as moleculas do solido fossem livres serão expressas por

$$\Sigma\, (\omega\, r + \varphi \cos \alpha\, .\, dt)\, dm;$$

e as quantidades de movimento que tem effectivamente logar serão representadas por

$$\Sigma\, (\omega\, r + rd\, \omega)\, dm.$$

Em virtude do principio de D'Alembert, deve haver equilibrio, em cada instante, entre as forças primitivamente impressas ao systema, como si fosse livre e as forças effectivas tomadas em sentidos contrarios; mas, para que estas duas especies de forças se equilibrem em torno de um eixo fixo, é preciso que a somma algebrica de seus momentos em relação ao eixo seja nulla ; e por serem as componentes tangenciaes, perpendiculares aos raios dos circulos descriptos pelas moleculas do solido, devemos multiplicar as quantidades precedentes por estes differentes raios, para termos os referidos momentos. D'onde

$$\Sigma\,(\omega\, r^2 + r\,\varphi \cos\alpha\,.\,dt)\,dm - \Sigma\,(\omega\, r^2 + r^2 d\,\omega)\,dm = 0\,;$$

ou, o que é o mesmo,

$$\Sigma\,(r\,\varphi \cos\alpha\,.\,dtdm) = \Sigma\,(r^2 d\,\omega\, dm).$$

As quantidades dt e $d\,\omega$ sendo constantes em todos os termos, devem ser postas para fóra do signal Σ; e este signal, affectando quantidades infinitesimaes, deverá ser substituido pelo signal $\int$; d'onde

$$dt \int r\,\varphi \cos\alpha\,.\,dm = d\,\omega\,.\int r^2 dm\,;$$

portanto,

$$\frac{d\,\omega}{dt} = \frac{\int r\,\varphi \cos\alpha\,.\,dm}{\int r^2 dm}. \qquad (35)$$

Tal é a fórmula que determina a *acceleração angular*

$$\frac{d\omega}{dt}$$

em uma época qualquer : é a equação do movimento variado de rotação d'um solido invariavel em torno d'um eixo fixo.

486. D'essa equação conclue-se que, si as forças acceleratrizes são nullas,

$$\frac{d\,\omega}{at} = 0\,;$$

d'onde, ω = const.; isto é, que o movimento será uniforme. O movimento tambem será uniforme quando as forças acceleratrizes se equilibram em torno do eixo de rotação. Com effeito, n'este caso, a somma dos momentos das forças será nulla; isto é, que

$$\int r\,\varphi \cos\alpha\, dm = 0 ;$$

d'onde, a mesma equação dá-nos ainda :

$$\frac{d\,\omega}{dt} = 0 ;$$

portanto, ω = const.

487. Pendulo composto.— Como util applicação da equação do movimento variado, estudemos o caso do movimento de rotação de um corpo pesado, em torno de um eixo fixo e horizontal.

Para isto, refiramos o pendulo composto dado a tres eixos rectangulares fixos Ax, Ay, Az (fig. 141), taes que os dous ultimos sejam horizontaes e o primeiro seja vertical.

Como a gravidade é a unica força acceleratriz que temos de considerar, resultará:

$$\varphi = \varphi' = \varphi'' = \varphi''' = \text{etc.} = g.$$

A molecula dm sendo solicitada por uma força parallela ao eixo dos x, o angulo α será igual a Tmg. Designando r a distancia Am e traçando a recta mD perpendicular ao eixo dos x, teremos :

$$Dm = r \cos\alpha ;$$

ou,

$$y = r \cos\alpha ;$$

d'onde,

$$\cos\alpha = \frac{y}{r}.$$

Substituindo este valor e o da força φ, na equação (35), virá:

$$\frac{d\,\omega}{dt} = \frac{\int g y dm}{\int r^2 dm} ;$$

ou, o que é a mesma cousa,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g\int ydm}{\int r^2dm}.$$

Por ser ydm o momento do elemento dm em relação ao eixo dos x, e si designarmos por y_1 a ordenada do centro de gravidade e por M a massa do solido considerado, teremos :

$$My_1 = \int ydm ;$$

d' onde,

$$\frac{d\,\omega}{dt} = \frac{gM\,y_1}{\int r^2dm}.$$

Si Mk^2 é o momento de inercia do solido em relação a um eixo que passa por seu centro de gravidade e que é parallelo a Az, e si a é a distancia d'estes dous eixos, teremos :

$$\int r^2dm = M\,(k^2 + a^2) ;$$

portanto,

$$\frac{d\,\omega}{dt} = \frac{gy_1}{k^2 + a^2}. \tag{36}$$

No movimento de rotação do solido em torno do eixo Az, o seu centro de gravidade, como qualquer outro ponto do solido, descrevendo um arco de circulo n'um plano perpendicular ao eixo, é claro que si (x_1, y_1) são as coordenadas d'este ponto, ellas verificarão a equação :

$$y_1^2 = 2\,ax_1 - x_1^2 ;$$

d'onde,

$$y_1 = \sqrt{2\,ax_1 - x_1^2}. \tag{37}$$

Si s é o arco descripto pelo centro de gravidade do solido, a sua velocidade linear será $\frac{ds}{dt}$; e como este centro acha-se á distancia a do eixo de rotação, teremos :

$$\frac{ds}{dt} = \omega a ;$$

d'onde,

$$\omega = \frac{1}{a} \cdot \frac{ds}{dt}. \qquad (38)$$

Substituindo os valores (37) e (38) na equação (36), resultará :

$$\frac{d \frac{1}{a} \frac{ds}{dt}}{dt} = \frac{g\sqrt{2\,ax_1 - x_1^2}}{k^2 + a^2};$$

d'onde,

$$\frac{1}{a} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g\sqrt{2\,ax_1 - x_1^2}}{k^2 + a^2}.$$

Multiplicando os dous membros d'esta equação por $2ads$, teremos:

$$2 \frac{d^2s}{dt^2} ds = \frac{2\,ag\sqrt{2\,ax_1 - x_1^2}}{k^2 + a^2} ds;$$

d'onde,

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2\,ag}{k^2 + a^2} ds \sqrt{2\,ax_1 - x_1^2};$$

portanto,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \int \frac{2\,ag}{k^2 + a^2} ds \sqrt{2\,ax_1 - x_1^2}.$$

Designando por v a velocidade $\frac{ds}{dt}$, teremos :

$$v^2 = \int \frac{2\,ag}{k^2 + a^2} ds \sqrt{2\,ax_1 - x_1^2}. \qquad (39)$$

Differenciando a equação (37),

$$y_1^2 = 2\,ax_1 - x_1^2,$$

virá :

$$y_1 dy_1 = (a - x_1)\, dx_1;$$

d'onde,

$$dy_1^2 = \frac{(a - x_1)^2\, dx_1^2}{y_1^2}. \qquad (40)$$

Substituindo o valor dado pela equação (37) na relação conhecida,

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2},$$

resultará :

$$ds = \sqrt{\left(1 + \frac{(a - x_1)^2}{y_1^2}\right) dx_1^2} = dx_1 \sqrt{\frac{y_1^2 + (a - x_1)^2}{y_1^2}}.$$

Attendendo á equação (37), teremos :

$$ds = dx_1 \sqrt{\frac{a^2}{y_1^2}} = \pm \frac{a dx_1}{y_1} = \pm \frac{a dx_1}{\sqrt{2\,ax_1 - x_1^2}}.$$

Preferindo o signal inferior, porque os accrescimos de x_1 são negativos, vem :

$$ds = -\frac{a dx_1}{\sqrt{2\,ax_1 - x_1^2}}. \tag{41}$$

Agora, substituindo este valor na equação (39), teremos :

$$v^2 = -\int \frac{2\,a^2 g}{k^2 + a^2}\, dx_1;$$

d'onde, integrando, vem :

$$v^2 = -\frac{2\,a^2 g}{k^2 + a^2}\, x_1 + \text{const.} \tag{42}$$

Esta constante se determinará para o valor que toma a abscissa x_1 quando a velocidade v fôr nulla ; e chamando b este valor, teremos :

$$\text{const.} = \frac{2\,a^2 g}{k^2 + a^2}\, b;$$

d'onde, substituindo este valor na equação (42), resulta :

$$v^2 = \frac{2\,a^2 g}{k^2 + a^2}\,(b - x_1).$$

Mas,

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2};$$

logo,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2\,a^2 g}{k^2 + a^2}(b - y_1)\,;$$

portanto,

$$dt = \frac{ds_1}{\sqrt{\frac{2\,a^2 g}{k^2 + a^2}(b - x_1)}}. \qquad (43)$$

O valor de ds dado pela equação (41),

$$ds = -\frac{a dx_1}{\sqrt{(2\,a - x_1)\,x_1}},$$

poderá, no caso de oscillações infinitesimaes, ser reduzido simplesmente á

$$ds = -\frac{a dx_1}{\sqrt{2\,a x_1}},$$

por ser x_1 uma grandeza muito pequena em relação a $2\,a$.

Assim, a equação (43) tomará a fórma:

$$dt = -\frac{\frac{1}{2}\,dx_1}{\sqrt{\frac{ag}{k^2 + a^2}(b - x_1)\,x_1}}\,;$$

ou, o que é o mesmo,

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2 + a^2}{ag}}\,.\,\frac{dx_1}{\sqrt{b x_1 - x_1^2}}\,;$$

d'onde,

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2 + a^2}{ag}}\int\frac{dx_1}{\sqrt{b x_1 - x_1^2}}. \qquad (44)$$

Mas,

$$\int\frac{dx_1}{\sqrt{b x_1 - x_1^2}} = \text{arc sen vers}\,\frac{2\,x_1}{b} + \text{C}\,;$$

ou por ser

$$\text{arc sen vers}\,\frac{2\,x_1}{b} = \text{arc cos}\left(1 - \frac{2\,x_1}{b}\right),$$

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{bx_1 - x_1^2}} = \text{arc cos}\left(1 - \frac{2\,x_1}{b}\right) = \text{arc cos}\,\frac{b - 2\,x_1}{b} + \text{C}.$$

Substituindo este valor na equação (44), teremos :

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2 + a^2}{ag}}.\ \text{arc cos}\,\frac{b - 2\,x_1}{b} + \text{C}. \qquad (45)$$

Esta constante se determinará para o valor b que toma a variavel x_1 quando $t = 0$; isto é, que

$$0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2 + a^2}{ag}}\ \text{arc cos}\,(-1) + \text{C} ;$$

d'onde, si $2\,\pi$ é medida da circumferencia de raio igual á unidade,

$$\text{C} = \frac{1}{2}\,\pi\,\sqrt{\frac{k^2 + a^2}{ag}} ;$$

portanto, substituindo este valor na equação (45), teremos :

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2 + a^2}{ag}}\left(\pi - \text{arc cos}\,\frac{b - 2\,x_1}{b}\right). \qquad (46)$$

488. Imaginando que o corpo pesado que consideramos se reduza a uma só molecula, ligada ao eixo Az por um fio inflexivel e inextensivel, cuja massa possa ser desprezada, e suppondo que este fio seja perpendicular ao eixo Az, resultará um pendulo simples.

Designando por l o comprimento d'este pendulo, teremos $a = l$; e sendo M a massa do ponto material, o momento de inercia será :

$$\text{M}\,(k^2 + a^2) = \text{M}l^2,$$

pois, $k = 0$. Assim, a equação do movimento do pendulo simples capaz das mesmas oscillações que o pendulo composto dado, será :

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\pi - \text{arc cos } \frac{b - 2x_1}{b}\right). \qquad (47)$$

Comparando-se, pois, as equações (46) e (47), vê-se que esta coincidencia de movimentos terá logar sempre que os coefficientes

$$\frac{k^2 + a^2}{ag} \text{ e } \frac{l}{g}$$

forem iguaes, isto é, quando

$$l = \frac{k^2 + a^2}{a}. \qquad (48)$$

Tal é a fórmula por meio da qual poderemos sempre determinar o comprimento do pendulo simples, cujas oscillações coincidam, por suas durações e amplitudes, com as do pendulo composto considerado.

489. Estudemos a equação (47). Ella dá-nos o tempo em que o movel percorre sem velocidade inicial um arco MM' (fig. 142).

Para termos o tempo em que o movel percorre o arco comprehendido desde M até o ponto E, o mais baixo, façamos $x_1 = 0$. Resultará :

$$t' = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (49)$$

Quando o movel chega ao ponto E, acha-se animado do *maximum* de velocidade. Com effeito, a velocidade sendo determinada pela equação

$$v = \sqrt{2gh},$$

o *maximum* de h é no ponto E. Animado d'esta velocidade, o movel proseguirá sobre o arco EN ; e este arco sendo contrario ao arco ME, é claro que o tempo que o movel emprega para chegar a N' será dado pela equação

$$t'' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\pi + \text{arc cos} \frac{b - x_1}{b}\right). \qquad (50)$$

E si, agora, da equação precedente subtrahirmos a equação (49), que nos dá o tempo decorrido desde o ponto M até o ponto E, resultará evidentemente a equação seguinte:

$$t'' - t' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(arc\ cos \frac{b - 2\,x_1}{b}\right), \qquad (51)$$

que nos dará o tempo em que o movel vae de E á N'. Este tempo é exactamente o mesmo que o movel gastaria em ir de M' á E, pois si da equação (49) deduzirmos a equação (47), resultará o mesmo valor (51).

Si, finalmente, o movel eleva-se até o ponto N, que se acha sobre o plano horizontal que passa pelo ponto M, no qual a velocidade é nulla, teremos :

$$x_1 = EB = b;$$

d'onde,

$$arc\ cos\ \frac{b - 2\,x_1}{b}\ arc\ cos\ (-1) = \pi;$$

e substituindo este valor na equação (50), vem :

$$t'' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} . 2\,\pi;$$

d'onde,

$$t'' = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Tal é a fórmula que nos dá o tempo que o movel empregará em percorrer toda a amplitude MEN.

490. As oscillações d'um pendulo composto sendo muito pequenas, tambem serão as do seu pendulo simples synchrono. Si, pois, T designa a duração d'uma oscillação inteira d'um pendulo composto dado, teremos :

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Assim, durante um tempo qualquer, contando-se o numero das oscillações d'um pendulo composto dado e dividindo-se o tempo considerado pelo numero de oscillações, resultará o valor de T. Pela substituição d'este valor e do valor de l, dado pela fórmula (48), na expressão (52), poderemos calcular, com a maior precisão possivel, o valor da constante g que exprime a intensidade da gravidade.

491. Seja traçada no interior d'um pendulo composto dado, abaixo do centro de gravidade d'este solido e no plano determinado por este ponto e pelo eixo de rotação, uma recta parallela ao eixo e á distancia l do mesmo eixo.

Isto posto, dizemos que os movimentos de todos os pontos d'esta parallela se effectuarão como si estes pontos fossem livres, isto é, que o movimento de cada ponto não será perturbado pelos movimentos dos outros pontos do solido. Com effeito, pois é claro que os pontos da parallela considerada, constituirão um systema de pendulos simples que se movem simultaneamente.

A estes pontos os geometras chamaram *centros de oscillação ;* a parallela ao eixo, á distancia l do eixo de suspensão, tomou o nome de *eixo de oscillação* ; mas chama-se especialmente *centro de oscillação* o ponto situado sobre a mesma perpendicular ao eixo de suspensão, que passa pelo centro de gravidade.

492. Supponhamos que ABD (fig. 143) seja a secção d'um pendulo composto, feita por um plano perpendicular ao eixo de suspensão e que passa pelo centro de gravidade G do pendulo.

Seja C o ponto de intersecção do eixo de suspensão com a secção ABD.

Façamos :

$$CG = a, \; GO = \frac{k^2}{a};$$

d'onde,

$$CO = a + \frac{k^2}{a} = \frac{a^2 + k^2}{a} = l;$$

portanto, o ponto O será o centro de oscillação do pendulo.

Ora, si fizermos o pendulo oscillar em torno do eixo que passa pelo ponto C e é perpendicular á secção ABD, é claro que tambem poderemos fazer o pendulo oscillar em torno do eixo que passa pelo ponto O e é perpendicular á mesma secção, de modo que o ponto C ficará sendo o centro de oscillação. Formulando esta proposição, diremos: *os centros de suspensão e de oscillação são reciprocos um do outro.*

Com effeito, o producto das distancias do centro de gravidade aos centros de suspensão e de oscillação, em qualquer dos dous casos, é igual a k^2; d'onde, o momento de inercia Mk^2 será sempre o mesmo. Assim, si tomassemos o eixo de oscillação para eixo fixo de rotação, o eixo de suspensão seria o eixo de oscillação.

493. *Ha uma infinidade de eixos differentes em torno dos quaes as pequenas oscillações de um mesmo corpo são de igual duração.*

Evidentemente, o valor de l e o tempo das oscillações serão os mesmos para todos os eixos de suspensão parallelos entre si e situados á mesma distancia do centro de gravidade do pendulo, porque as quantidades k e a são constantes para todos estes eixos.

Si (A, B, C) são os tres momentos de inercia em relação aos eixos principaes que se cortam no centro de gravidade G do solido ; si designamos por (α, β, γ) os angulos que a parallela ao eixo de suspensão, traçada pelo centro

de gravidade, faz respectivamente com os tres eixos principaes, e si Mk^2 é o momento de inercia do solido em relação a esta parallela, resultará :

$$Mk^2 = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma;$$

d'onde, servindo-nos da equação (48), teremos;

$$l = a + \frac{A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma}{Ma};$$

tal é a fórmula que nos mostra claramente que as quantidades (a, α, β, γ) podem ter uma infinidade de valores differentes sem que l deixe de ter sempre o mesmo valor, como queriamos demonstrar.

494. Si quizessemos determinar o eixo da *mais curta* oscillação, bastaria que procurassemos o *minimum* da quantidade l. Suppondo que a constante A seja menor que B e C, o menor valor da quantidade

$$A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma,$$

será A. Fazendo, pois,

$$\alpha = 0, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ,$$

teremos :

$$l = a + \frac{A}{Ma}.$$

Para termos o *minimum* de l, estabeleçamos a condição necessaria :

$$\frac{dl}{da} = 0;$$

d'onde,

$$a = \sqrt{\frac{A}{M}};$$

portanto, o *minimum* de l será :

$$l = 2\sqrt{\frac{A}{M}}.$$

Fica d'est'arte concluido o estudo do movimento de rotação d'um solido invariavel em torno d'um eixo fixo.

CAPITULO V

THEORIA DA ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO

---

493. Do precioso trabalho de Leonardo Euler, publicado em 1758, na *Histoire de l'Académie de Berlin*, extrahimos as considerações seguintes: « O assumpto a que me proponho tratar aqui é da maxima importancia na Mecanica e tenho já feito muitos esforços para publical-o. Mas, ainda que o calculo tenha tido bom exito, e eu tenha descoberto fórmulas analyticas que determinam todas as circumstancias de que o movimento d'um corpo em torno de um eixo variavel é susceptivel, a sua applicação era comtudo sujeita a difficuldades que me pareceram quasi insuperaveis. Ora, desde que tenho desenvolvido os principios do conhecimento mecanico dos corpos, a bella propriedade dos tres eixos principaes de que cada corpo é dotado me ha finalmente posto em estado de vencer todas estas difficuldades e de estabelecer as regras sobre as quaes é fundado o movimento de rotação em torno d'um eixo variavel, de sorte que podemos fazer applicação d'essas regras a todos os casos propostos.

« Ora, primeiro é preciso recordar que, qualquer que seja o movimento d'um corpo solido, podemos sempre decompol-o em dous, dos quaes um é o movimento progressivo, ou o de seu centro de inercia, e o outro é o movimento de rotação que restaria ao corpo, si lhe tirassemos o movimento progressivo, suppondo que o espaço fosse transportado em cada instante d'um movimento igual e contrario.

« Demonstra-se na Mecanica que cada um d'estes dous movimentos segue regras particulares, e que póde-se determinar cada um á parte, sem ter attenção ao outro. Assim, para determinar o movimento progressivo, concebe-se a massa inteira do corpo como reunida em seu centro de inercia e procura-se o effeito das forças que sobre elle actuam, conforme os primeiros principios da Mecanica, sem indagar-se si o corpo tem além d'isso um movimento de rotação, ou não. E quando trata-se do movimento de rotação é permittido fazer abstracção do movimento progressivo: é a grande propriedade do centro de inercia, que nos permitte essa commodidade nas indagações mecanicas.

« Deter-me-hei unicamente sobre o movimento de rotação e, portanto, considerarei aqui o centro de inercia do corpo como fixo.

« Então é facil de vêr que, qualquer que seja o movimento do corpo, achar-se-ha em cada instante uma linha recta, que passa pelo centro de inercia, na qual o movimento é nullo, e em torno da qual o corpo gyra n'esse instante; é esta linha que se chama o eixo de rotação. Logo, para ter-se conhecimento perfeito d'um tal movimento, é preciso que se possa determinar para cada instante tanto o eixo de rotação em torno do qual o corpo gyra então, como a velocidade com que elle gyra. Por consequencia, um tal movimento é susceptivel d'uma dupla variação, uma na velocidade de rotação e a outra na posição do proprio eixo de rotação. E', pois, tambem a esta dupla variação que reduz-se o effeito de todas as forças que actuam sobre o corpo. Quando o eixo de rotação fica invariavel, de sorte que as forças exerçam seu effeito sómente sobre a velocidade de rotação, as regras são já muito conhecidas para determinar-se este movimento. Mas não é do mesmo modo a respeito da variabilidade do eixo de rotação. »

496. Feitas estas magistraes considerações, procuremos *determinar o eixo, continuamente variavel, em torno do qual a rotação deve, em cada instante, effectuar-se como si elle fosse immovel.*

Para isto, consideremos um solido invariavel gyrando em torno d'um de seus pontos supposto fixo, ou em torno d'um ponto fixo ligado invariavelmente ao corpo.

Seja O (fig. 145) o ponto fixo considerado; sejam Ox, Oy, Oz tres eixos rectangulares, arbitrariamente fixos no espaço, e sejam Ox_1, Oy_1, Oz_1 tres outros eixos rectangulares, adherentes ao solido e moveis em torno do ponto O.

Designemos por (x, y, z) as coordenadas d'um ponto qualquer M do solido, relativas ao primeiro systema de eixos, e por (x_1, y_1, z_1) as coordenadas do mesmo ponto, relativas aos eixos Ox_1, Oy_1, Oz_1. As fórmulas de transformação das coordenadas, conhecidas da *Geometria algebrica*, serão:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1, \\ y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

N'estas fórmulas as quantidades (a, b, c) representam os cosenos dos angulos que faz o eixo dos x respectivamente com os eixos dos x_1, y_1, z_1; as quantidades (a', b', c') designam os cosenos dos angulos que o eixo dos y faz respectivamente com os mesmos eixos, e, finalmente, (a'', b'', c'') são os cosenos dos angulos que o eixo dos z faz respectivamente com os novos eixos.

Em qualquer dos dous systemas de eixos considerados, o quadrado da distancia do ponto M á origem commum sendo igual á somma dos quadrados das coordenadas que fixam a posição do mesmo ponto, teremos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2. \qquad (a)$$

Substituindo n'esta relação os valores de (x, y, z), dados pelas equações (1), teremos as condições seguintes:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & ac + a'c' + a''c'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Inversamente, si quizermos determinar os valores de (x_1, y_1, z_1) por meio dos valores de (x, y, z) empregaremos as seguintes fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= ax + a'y + a''z, \\ y_1 &= bx + b'y + b''z, \\ z_1 &= cx + c'y + c''z; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

e substituindo-as na relação (a) resultarão as condições:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad & aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad & aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \quad & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Taes são as relações que existem entre as nove quantidades $(a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'')$. Estas quantidades são constantes, em cada instante, para todos os pontos do solido, mas são variaveis com o tempo durante a rotação do solido.

As quantidades (x_1, y_1, z_1) variam conforme o ponto que ellas determinam, mas são constantes para um mesmo ponto durante a rotação do solido.

Assim, differenciando as equações (1) em relação ao tempo t, teremos:

$$\frac{dx}{dt} = x_1 \frac{da}{dt} + y_1 \frac{db}{dt} + z_1 \frac{dc}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = x_1 \frac{da'}{dt} + y_1 \frac{db'}{dt} + z_1 \frac{dc'}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = x_1 \frac{da''}{dt} + y_1 \frac{db''}{dt} + z_1 \frac{dc''}{dt}.$$

São estas as fórmulas que exprimem os valores, em cada instante, das componentes da velocidade do ponto M, parallelas aos eixos fixos Ox, Oy, Oz.

Para conhecermos os pontos do solido cujas velocidades são nullas em cada instante, façamos :

$$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0 ;$$

d'onde,

$$\left.\begin{array}{l} x_1\, da + y_1\, db + z_1\, dc = 0, \\ x_1\, da' + y_1\, db' + z_1\, dc' = 0, \\ x_1\, da'' + y_1\, db'' + z_1\, dc'' = 0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Si multiplicarmos a primeira d'estas equações por c, a segunda por c' e a terceira por c'' e si ajuntarmos as equações resultantes, teremos :

$$\left.\begin{array}{l} x'_1\,(cda + c'da' + c''da'') + y_1\,(cdb + c'db' + c''db'') + \\ \quad + z_1\,(cdc + c'dc' + c''dc'') = 0. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Fazendo, para mais simplicidade,

$$cdb + c'db' + c''db'' = pdt, \quad cda + c'da' + c'da'' = -\, qdt ;$$

e attendendo a que a relação

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

sendo differenciada, dá-nos :

$$cdc + c'dc' + c''dc'' = 0, \qquad (a_1)$$

a equação (6) se reduzirá á fórma :

$$py_1 - qx_1 = 0.$$

Si ajuntarmos as equações (5), depois de respectivamente multiplicadas por b, b', b'' ; si fizermos

$$bda + b'da' + b''da'' = rdt ;$$

e si attendermos as que as condições

$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0,$$

sendo respectivamente differenciadas, dão-nos :

$$bdb + b'db' + b''db'' = 0, \qquad (a_2)$$

$$bdc + b'dc' + b''dc'' = - cdb - c'db' - c''db'' = - pdt, \qquad (b)$$

teremos a equação :

$$rx_1 - pz_1 = 0.$$

Si, finalmente, ajuntarmos as equações (5), depois de multiplicadas respectivamente por (a, a', a'') ; si attendermos ás condições

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$

$$ac + a'c' + a''c'' = 0 ;$$

d'onde,

$$ada + a'da' + a''da'' = 0, \qquad (a_3)$$

$$adb + a'db' + a''db'' = - bda - b'da' - b''da'' = - rdt, \qquad (c)$$

$$adc + a'dc' + a''dc'' = - cda - c'da' - c''da'' = qdt, \qquad (d)$$

resultará a equação :

$$qz_1 - ry_1 = 0.$$

Portanto,

$$py_1 - qx_1 = 0, \quad rx_1 - pz_1 = 0, \quad qz_1 - ry_1 = 0, \qquad (7)$$

poderão ser consideradas em logar das equações (5).

Examinando estas equações (7), facilmente se reconhecerá que cada uma resulta das duas outras ; por exemplo, a primeira resultará das duas ultimas, si z_1 fôr eliminado d'estas equações. Assim, consideremos sómente as duas equações

$$rx_1 - pz_1 = 0, \quad qz_1 - ry_1 = 0.$$

Ellas representam uma linha recta que passa pela origem O commum aos dous systemas de eixos coordenados ; portanto, todos os pontos do solido, cujas velocidades são nullas em qualquer instante, acham-se situados

sobre uma linha recta que passa pelo centro de rotação. D'onde, esta recta será immovel durante um tempo infinitamente pequeno ; e, portanto, durante este instante, o solido será animado d'uma rotação em torno d'essa recta como si fosse em torno d'um eixo fixo. Assim, é evidente que *a rotação d'um solido em torno d'um ponto fixo tem logar, em cada instante, em torno d'um eixo que fica immovel durante um tempo infinitamente pequeno* ; e como é variavel a posição d'um tal eixo, d'um instante a outro, durante a rotação do solido, Euler o chamou *eixo instantaneo de rotação.*

« Deve-se philosophicamente considerar esta noção como uma consequencia dynamica da natureza algebrica das fórmulas de transposição, que são necessariamente do primeiro gráo relativamente ás diversas coordenadas : é assim que o calculo liga a geometria á mecanica.» (A. Comte.)

497. Para determinarmos a direcção do eixo instantaneo de rotação, supponhamos que a recta IOI_1 (fig. 144) seja no fim do tempo t este eixo. As equações (7) sendo as das projecções d'esta linha respectivamente sobre os planos dos $(y_1x_1,\ x_1z_1,\ z_1y_1)$, teremos :

$$\left.\begin{aligned} \cos IO\,x_1 &= \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos IO\,y_1 &= \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos IO\,z_1 &= \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Assim, quando as tres quantidades $(p,\ q,\ r)$ forem conhecidas, poderemos determinar a posição do eixo instantaneo, relativamente aos eixos Ox_1, Oy_1, Oz_1. Quando $\frac{p}{r}$ e $\frac{q}{r}$ forem constantes, o eixo de rotação passará constantemente pelos mesmos pontos do solido, o que acontecerá quando elle fôr um eixo fixo no espaço.

As fórmulas precedentes sendo proprias para a determinação da direcção do eixo instantaneo de rotação relativamente aos eixos moveis, procuremos estabelecer as que a determinam em relação aos eixos fixos.

Ora, a *Geometria algebrica* nos ensina que:

$$\cos IO\, x = a \cos IO\, x_1 + b' \cos IO\, y_1 + c \cos IO\, z_1,$$
$$\cos IO\, y = a' \cos IO\, x_1 + b' \cos IO\, y_1 + c' \cos IO\, z_1,$$
$$\cos IO\, z = a'' \cos IO\, x_1 + b'' \cos IO\, y_1 + c'' \cos IO\, z_1;$$

d'onde, tendo em vista as equações (8), resultarão as fórmulas seguintes :

$$\left.\begin{aligned} \cos IO\, x &= \frac{ap + bq + cr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos IO\, y &= \frac{a'p + b'q + c'r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \\ \cos IO\, z &= \frac{a''p + b''q + c''r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Taes são as fórmulas procuradas. N'estas fórmulas, quando as quantidades (p, q, r) forem constantes, os seus numeradores deverão ser independentes do tempo. Esta invariabilidade facilmente póde ser demonstrada. Com effeito, a primeira das equações (d), a primeira das equações (b) e a equação (a_1), sendo respectivamente multiplicadas por (a, b, c), (a', b', c') e (a'', b'', c''), dão-nos tres grupos de equações differentes. Si reunirmos as tres equações de cada grupo em uma só teremos:

$$dc = (aq - bp)\, dt, \quad dc' = (a'q - b'p)\, dt, \quad dc'' = (a''q - b''p) dt. \quad (c)$$

Procedendo do mesmo modo para com a primeira das equações (c), a equação (a_2) e a segunda das equações (b), teremos :

$$db = (cp - ar)\, dt, \quad db' = (c'p - a'r)\, dt, \quad db'' = (c''p - a''r) dt. \quad (f)$$

Finalmente, a equação (a_3), a segunda das equações (c) e a segunda das equações (d) dão-nos :

$$da = (br - cq)\,dt, \quad da' = (b'r - c'q)\,dt, \quad da'' = (b''r - c''q)\,dt. \quad (g)$$

Ora, das equações (g), (f) e (e) muito facil será deduzir as relações seguintes :

$$pda + qdb + rdc = 0, \quad pda' + qdb' + rdc' = 0,$$
$$pda'' + qdb'' + rdc'' - 0,$$

que são as differenciaes dos numeradores das expressões (9). E como (p, q, r) são suppostos constantes, é claro que os numeradores não poderão ser variaveis ; portanto, serão constantes.

498. Passemos a determinar a velocidade angular em torno do eixo instantaneo de rotação.

Si, em cada instante, a rotação se effectua em torno d'um eixo como si este eixo fosse fixo, é claro que todos os pontos do corpo terão, durante um tempo infinitamente pequeno, a mesma velocidade de rotação. Para a conhecermos, tomemos o ponto que, sobre o eixo Oz_1, acha-se á distancia da origem O igual á unidade. As coordenadas d'este ponto serão :

$$x_1 = 0, \quad y_1 + 0, \quad z_1 = 1.$$

Chamando v a velocidade linear d'este ponto, teremos :

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Substituindo n'esta equação os valores de

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

resultará :

$$v = \sqrt{\frac{dc^2 + dc'^2 + dc''^2}{dt^2}}.$$

A distancia do ponto considerado ao eixo de rotação II_1 será :

$$\text{sen IO}\,z_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \text{IO}\,z_1} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

d'onde, chamando ω a velocidade angular, no fim do tempo t, teremos :

$$\omega = \frac{v}{\text{sen IO}\,z_1} = \frac{\sqrt{dc^2 + dc'^2 + dc''^2}}{dt\sqrt{p^2 + q^2}}\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Em vista das relações :

$$- pdt = bdc + b'dc' + b''dc'', \quad qdt = adc + a'dc' + a''dc'',$$

deduz-se :

$$(p^2 + q^2)\,dt^2 = dc^2 + dc'^2 + dc''^2 - (cdc + c'dc' + c''dc'')^2 ;$$

d'onde,

$$dt\sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{dc^2 + dc'^2 + dc''^2},$$

por ser

$$cdc + c'dc' + c''d'' = 0.$$

Assim, o valor de ω será :

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}. \tag{10}$$

Tal é a fórmula que nos determinará a velocidade de rotação.

Esta quantidade ω poderá ser variavel quando o eixo de rotação fôr fixo no espaço e poderá ser constante quando o eixo de rotação fôr variavel.

Será constante quando a quantidade $(p^2 + q^2 + r^2)$ fôr constante ; e isto poderá acontecer sem que as quantidades (p, q, r) sejam constantes.

As quantidades (p, q, r) são chamadas as componentes rectangulares da velocidade de rotação ω em torno dos eixos Ox_1, Oy_1, Oz_1 ; *ellas são as velocidades angulares em torno de cada um d'estes eixos.*

199. O simples exame das equações (9) e (10) nos mostra que a determinação da direcção variavel do eixo de rotação, bem como a determinação da velocidade angular que lhe corresponde, ficam dependentes das variaveis (p, q, r). Assim, procuremos determinar estas quantidades.

Para isto, lancemos mão das equações (D) e (E) do capitulo em que estudámos a rotação d'um solido invariavel em torno d'um ponto fixo. Essas equações são as seguintes :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . m \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \Sigma \, (Xy - Yx), \\ \Sigma . m \left(x \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \Sigma \, (Zx - Xz), \\ \Sigma . m \left(z \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= \Sigma \, (Yz - Zy), \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Designando por (M, M', M″) a somma dos momentos das forças que actuam sobre cada ponto do solido, relativamente aos eixos dos x, dos y e dos z ; representando por dm a massa de cada elemento do solido ; multiplicando cada uma d'essas equações precedentes por dt ; substituindo o signal Σ pelo signal $\int$, e, integrando-as, teremos :

$$\left.\begin{aligned} \int dm \left(\frac{ydz - zdy}{dt} \right) &= \int \mathrm{M}dt, \\ \int dm \left(\frac{zdx - xdz}{dt} \right) &= \int \mathrm{M}'dt, \\ \int dm \left(\frac{xdy - ydx}{dt} \right) &= \int \mathrm{M}''dt. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Substituindo na primeira d'estas equações os valores de

$$\left(y, \ z, \ \frac{dy}{dt}, \ \frac{dz}{dt} \right),$$

dados precedentemente, teremos :

$$\int dm \left[\left(\frac{a'da'' - a''da'}{dt} \right) x_1^2 + \left(\frac{b'db'' - b''db'}{dt} \right) y_1^2 + \right.$$
$$+ \left(\frac{c'dc'' - c''dc'}{dt} \right) z_1^2 +$$
$$+ \left(\frac{a'db'' - b''da' + b'da'' - a''db'}{dt} \right) x_1 y_1 + \qquad (13)$$
$$+ \left(\frac{a'dc'' - c''da' + c'da'' - a''dc'}{dt} \right) x_1 z_1 +$$
$$\left. + \left(\frac{b'dc'' - c''db' + c'db'' - b''dc'}{dt} \right) y_1 z_1 \right] = \int \mathrm{M}dt.$$

Ora, das equações (1) e (3) conclue-se que :

$$\left. \begin{array}{l} a = b'c'' - b''c',\ a' = b''c - bc'',\ a'' = bc' - b'c, \\ b = a''c' - a'c'',\ b' = ac'' - a''c,\ b'' = a'c - ac', \\ c = a'b'' - a''b',\ c' = a''b - ab'',\ c'' = ab' - a'b; \end{array} \right\} \qquad (14)$$

e as relações (b), (c) e (d) dão-nos :

$$\left. \begin{array}{l} cdb + c'db' + c''db'' = -bdc - b'dc' - b'dc'' = pdt, \\ adc + a'dc' + a''dc'' = -cda - c'da' - c''da'' = qdt, \\ bda + b'da' + b''da'' = -adb - a'db' - a''db'' = rdt; \end{array} \right\} \qquad (15)$$

d'onde, substituindo na equação (13) os valores de (a', a'', b', b'', c', c''), dados pelas relações (14), e tendo em vista as relações (15), resultará a equação seguinte :

$$\int dm \left\{ \left[(y_1^2 + z_1^2) . p - x_1 z_1 . r - x_1 y_1 . q \right] a + \right.$$
$$+ \left[(x_1^2 + z_1^2) . q - y_1 z_1 . r - x_1 y_1 . p \right] b + \qquad (16)$$
$$\left. + \left[(x_1^2 + y_1^2) . r - y_1 z_1 . q - x_1 z_1 . p \right] c \right\} = \int \mathrm{M}dt.$$

Ora, fazendo por abreviação,

$$A = \int (y_1^2 + z_1^2)\, dm,\ B = \int (x_1^2 + z_1^2)\, dm,\ C = \int (x_1^2 + y_1^2)\, dm,$$
$$F = \int y_1 z_1\, dm,\ G = \int x_1 z_1\, dm,\ H = \int x_1 y_1\, dm,$$

a equação (16) tomará a fórma seguinte :

$$\left.\begin{aligned} a\,(Ap - Gr - Hq) + b\,(Bq - Fr - Hp) + \\ + c\,(Cr - Fq - Gp) = \int M.dt \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Um desenvolvimento de calculo inteiramente analogo ao precedente nos permittirá escrever as duas equações seguintes, correspondentes ás duas ultimas equações (12) :

$$\left.\begin{aligned} a'\,(Ap - Gr - Hq) + b'\,(Bq - Fr - Hp) + \\ + c'\,(Cr - Fq - Gp) = \int M'dt. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$\left.\begin{aligned} a''\,(Ap - Gr - Hq) + b''\,(Bq - Fr - Hp) + \\ + c''\,(Cr - Fq - Gp) = \int M''dt. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Para maior simplicidade de calculos, fazendo :

$$P = Ap - Gr - Hq,\quad Q = Bq - Fr - Hp,\quad R = Cr - Fq - Gp,$$

as equações (17), (18) e (19) se reduzirão á fórma seguinte :

$$\left.\begin{aligned} aP + bQ + cR &= \int Mdt, \\ a'P + b'Q + c'R &= \int M'dt, \\ a''P + b''Q + c''R &= \int M''dt. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Procuremos agora eliminar dos primeiros membros d'estas equações as quantidades (a, b, c, etc.) Para isto, differenciando as mesmas equações, teremos :

$$\left.\begin{aligned} a.\,dP + P.da + b.\,dQ + Q.db + c.\,dR + R.dc &= Mdt, \\ a'.\,dP + P.da' + b'.\,dQ + Q.db' + c'.\,dR + R.dc' &= M'dt, \\ a''.\,dP + P.da'' + b''.dQ + Q.db'' + c'.\,dR + R.dc'' &= M''dt. \end{aligned}\right\} (21)$$

Multiplicando a primeira d'estas equações por a, a segunda por a' e a terceira por a'', e sommando-as, depois de algumas reducções, resultará :

$$\frac{dP}{dt} - r.Q + q.R = aM + a'M' + a''M''. \qquad (22)$$

Si multiplicarmos as mesmas equações (21), respectivamente, por (b, b', b'') e as ajuntarmos, teremos :

$$\frac{dQ}{dt} + r.P - p.R = bM + b'M' + b''M''. \qquad (23)$$

E, finalmente, sommando as mesmas equações (21), depois de respectivamente multiplicadas por (c, c', c''), teremos :

$$\frac{dR}{dt} - q.P + p.Q = cM + c'M' + c''M''. \qquad (24)$$

As equações (22), (23) e (24) são as equações differenciaes do movimento de rotação d'um solido invariavel em torno d'um de seus pontos. Ellas nos farão conhecer, depois de integradas, os valores de (p, q, r) ; e estes valores, sendo substituidos nas equações (9) e (10), nos permittirão o conhecimento, em cada instante, da posição do eixo de rotação e da velocidade angular que lhe corresponde.

300. Si tomarmos os eixos principaes do solido para eixos dos (x_1, y_1, z_1), muito se simplificam as equações do movimento.

N'este caso, teremos :

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0 ;$$

d'onde,

$$P = ap, \quad Q = Bq, \quad R = Cr ;$$

portanto, as equações (22), (23) e (24) se reduzirão á fórma seguinte :

$$\left.\begin{aligned} A.\frac{dp}{dt}\ (C - B).qr &= aM + a'M' + a''M''. \\ B.\frac{dq}{dt}\ (A - C).rp &= bM + b'M' + b''M'', \\ C.\frac{dr}{dt}\ (B - A).pq &= cM + c'M' + c''M'', \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

As quantidades M, M', M'' designando as sommas dos momentos das forças acceleratrizes, respectivamente, em relação aos eixos dos x, dos y e dos z, é claro que poderemos conhecer as sommas d'estes mesmos momentos em relação aos eixos dos x_1, dos y_1 e dos z_1. Designando por N, N', N'' estas ultimas quantidades, teremos :

$$N = aM + a'M' + a''M'', \quad N' = bM + b'M' + b''M'',$$
$$N'' = cM + c'M' + c''M'' ;$$

d'onde, as equações (25) tomarão a fórma seguinte :

$$\left.\begin{aligned} A.\frac{dp}{dt} + (C - B).qr &= N, \\ B.\frac{dq}{dt} + (A - C).pr &= N', \\ C.\frac{dr}{dr} + (B - A).pq &= N''. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Taes são as memoraveis equações do movimento de rotação d'um solido invariavel, em torno d'um pólo fixo, conhecidas por *equações de Euler.*

501. Consideremos em logar das coordenadas rectangulas (x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', etc.), das moleculas d'um solido invariavel, as coordenadas polares d'estas moleculas; sejam (ρ, ρ', ρ'', ρ''', etc.) os seus raios vectores ; designemos por (φ, φ', φ'', φ''', etc.), (ψ, ψ', ψ'', ψ''', etc.) e (ω, ω', ω'', etc.) os angulos que, respectivamente, estes raios vectores fazem com os eixos dos x, dos y e dos z.

Isto posto, si o solido é animado d'uma rotação em torno da origem das coordenadas, consideremos separadamente as rotações instantaneas em torno de cada eixo de coordenadas.

Considerando primeiramente o eixo dos z, teremos, no plano dos xy, as relações seguintes:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad x' = \rho' \cos \varphi', \quad x'' = \rho'' \cos \varphi'', \text{ etc.},$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad y' = \rho' \operatorname{sen} \varphi', \quad y'' = \rho'' \operatorname{sen} \varphi'', \text{ etc.}$$

Suppondo que os angulos ($\varphi, \varphi', \varphi''$, etc.) variem todos da mesma quantidade $d\varphi$, o que é permittido, resultarão:

$$dx = - y d\varphi, \quad dx' = - y'd \varphi, \quad dx'' = - y'' d \varphi, \text{ etc.}$$
$$dy = xd \varphi, \quad dy' = x'd \varphi, \quad dy'' = x''d \varphi, \text{ etc.}$$

para expressões das differenciaes das coordenadas (x, y), (x', y'), (x'', y''), etc., que traduzem a rotação elementar $d\varphi$ do solido em torno do eixo dos z.

Analogamente, as differenciaes das coordenadas (y, z), (y'; z'), (y'', z''), etc., devidas á rotação $d\varphi$ em torno do eixo dos x, serão:

$$dy = -zd \psi, \quad dy' = - z'd \psi, \quad dy'' = - z''d \psi, \text{ etc.},$$
$$dz = yd \psi, \quad dz' = y'd \psi, \quad dz'' = y''d \psi, \text{ etc.}$$

e as differenciaes das coordenadas (z, x), (z', x'), (z'', x''), etc., que exprimem a rotação elementar $d\omega$ em torno do eixo dos y, serão:

$$dz = - xd \omega, \quad dz' = - x'd \omega, \quad dz'' = - x''d \omega, \text{ etc.}$$
$$dx = zd \omega, \quad dx' = z'd \omega, \quad dx'' = z''d \omega, \text{ etc.}$$

Suppondo que as tres rotações se effectuem simultaneamente, é claro que as differenciaes totaes serão as sommas das differenciaes parciaes; d'onde,

$$\left.\begin{aligned} dx &= zd \omega - yd \varphi, \quad dx' = z'd \omega - y'd \varphi, \text{ etc.}, \\ dy &= xd \varphi - zd \psi, \quad dy' = x'd \varphi - z'd \psi, \text{ etc.}, \\ dz &= yd \psi - xd \omega, \quad dz' = y'd \psi - x'd \omega, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Considerando no solido o ponto cujas coordenadas (x, y, z) sejam proporcionaes, respectivamente, a $d\psi$, $d\varphi$, $d\omega$, as fórmulas (27) dão-nos :

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = 0 ;$$

e attendendo a que uma série de pontos do solido gozarão d'esta propriedade, é claro que todos estes pontos serão immoveis durante o instante em que o solido descreve os tres angulos $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, simultaneamente em torno dos eixos dos x, dos y e dos z. Assim, todos esses pontos constituirão uma linha recta passando pela origem das coordenadas, que será o eixo instantaneo da rotação composta. As equações das projecções d'esta recta serão :

$$zd\,\omega - yd\,\varphi = 0, \quad xd\,\varphi - zd\,\psi = 0, \quad yd\,\psi - xd\,\omega = 0 ;$$

e chamando (λ, μ, ν) os angulos que, respectivamente, o eixo instantaneo faz com os tres eixos rectangulares, teremos :

$$\cos\lambda = \frac{d\psi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}} \qquad \cos\mu = \frac{d\omega}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + o\varphi^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{d\varphi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}}.$$

502. Si, por abreviação, fizermos

$$d\,\theta = \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2},$$

virá :

$$d\psi = d\,\theta\cos\lambda, \quad d\,\omega = d\,\theta\cos\mu, \quad d\,\varphi = d\,\theta\cos\nu ;$$

d'onde, tendo em vista as fórmulas (27), teremos :

$$\left.\begin{aligned} dx &= (z\cos\mu - y\cos\nu)\,d\,\theta, \\ dy &= (x\cos\nu - z\cos\lambda)\,d\,\theta, \\ dz &= (y\cos\lambda - x\cos\mu)\,d\,\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Si ds é o espaço elementar percorrido por um ponto qualquer do solido, teremos :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 ;$$

d'onde,

$$ds^2 = [(z \cos \mu - y \cos \nu)^2 + (x \cos \nu - z \cos \lambda)^2 +$$
$$+ (y \cos \lambda - x \cos \mu)^2] \, d\,\theta^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \, d\,\theta^2 -$$
$$- (x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu)^2 \, d\,\theta,$$

por ser

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1.$$

Considerando o plano que passa pela origem e é perpendicular ao eixo instantaneo de rotação, eixo que faz os angulos (λ, μ, ν) respectivamente com os tres eixos rectangulares fixos, a equação d'esse plano será :

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = 0 ;$$

d'onde,

$$ds^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \, d\,\theta^2 ;$$

e, portanto, o espaço ds percorrido por um ponto qualquer do plano dado pela equação (29) será :

$$ds = d\,\theta \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Por ser o eixo instantaneo perpendicular ao plano considerado, é claro que $d\,\theta$ será o angulo da rotação em torno d'esse eixo, e que esta rotação será composta das rotações elementares $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$.

503. «Do exposto resulta que rotações quaesquer instantaneas $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, em torno de tres eixos que se cortam em angulos rectos em um mesmo ponto, se compõem n'uma só,

$$d\,\theta = \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2},$$

em torno d'um eixo passando pelo mesmo ponto de intersecção, e fazendo com os referidos eixos os angulos (λ, μ, ν), taes que

$$\cos \gamma = \frac{d\psi}{d\theta}, \cos \mu = \frac{d\omega}{d\theta}, \cos \nu = \frac{d\varphi}{d\theta};$$

e reciprocamente, uma rotação qualquer $d\,\theta$ em torno d'um eixo dado póderá ser decomposta em tres rotações parciaes expressas por

$$\cos \lambda\, d\theta, \quad \cos \mu\, d\theta, \quad \cos \nu\, d\theta,$$

em torno de tres eixos que se cortam perpendicularmente em um ponto do eixo dado, e que fazem com este eixo os angulos λ, μ, ν, o que fornece um meio bem simples de compôr e decompôr os movimentos instantaneos ou as velocidades de rotação. » (Lagrange, *Mecanica Analytica.*)

504. Assim, consideremos tres novos eixos rectangulares e supponhamos que $(\lambda', \lambda'', \lambda''')$ designem os angulos que o eixo da rotação $d\psi$ faz, respectivamente, com os novos eixos ; sejam (μ', μ'', μ''') os angulos que o eixo da rotação $d\omega$ faz com estes mesmos eixos, e, finalmente, que (ν', ν'', ν''') sejam os angulos do eixo da rotação $d\varphi$ com os referidos eixos. Isto posto, as componentes das rotações $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, respectivamente, em torno dos novos eixos, serão :

$$\cos \lambda'\, d\,\psi, \quad \cos \lambda''\, d\,\psi, \quad \cos \lambda'''\, d\,\psi;$$
$$\cos \mu'\, d\,\omega, \quad \cos \mu''\, d\,\omega, \quad \cos \mu'''\, d\,\omega;$$
$$\cos \nu'\, d\,\varphi, \quad \cos \nu''\, d\,\varphi, \quad \cos \nu'''\, d\,\varphi;$$

d'onde, representando por $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ a somma algebrica das rotações em torno de cada um dos tres novos eixos, teremos :

$$\left.\begin{aligned} d\,\theta' &= \cos \lambda'\, d\,\psi + \cos \mu'\, d\,\omega + \cos \nu'\, d\,\varphi, \\ d\,\theta'' &= \cos \lambda''\, d\,\psi + \cos \mu''\, d\,\omega + \cos \nu''\, d\,\varphi, \\ d\,\theta''' &= \cos \lambda'''\, d\,\psi + \cos \mu'''\, d\,\omega + \cos \nu'''\, d\,\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Taes são as fórmulas por meio das quaes poderemos sempre reduzir as rotações $d\psi$, $d\omega$ e $d\varphi$, em torno de tres eixos rectangulares, a tres outras rotações $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$, em torno de tres novos eixos tambem rectangulares. Por estas fórmulas facilmente se reconhecerá que a resultante das rotações $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ será a mesma que a das rotações $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$; isto é, que :

$$d\theta = \sqrt{d\theta'^2 + d\theta''^2 + d\theta'''^2} = \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}.$$

505. Reciprocamente, poderemos conhecer as rotações $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, quando forem dadas as rotações $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$. Para isto, sommemos as tres equações (30) depois de multiplicadas, respectivamente, por $\cos\lambda'$, $\cos\lambda''$, $\cos\lambda'''$; por $\cos\mu'$, $\cos\mu''$, $\cos\mu'''$; e por $\cos\nu'$, $\cos\nu''$, $\cos\nu'''$. Teremos :

$$d\psi = \cos\lambda' \, d\theta' + \cos\lambda'' \, d\theta'' + \cos\lambda''' \, d\theta''',$$
$$d\omega = \cos\mu' \, d\theta' + \cos\mu'' \, d\theta'' + \cos\mu''' \, d\theta''',$$
$$d\varphi = \cos\nu' \, d\theta' + \cos\nu'' \, d\theta'' + \cos\nu''' \, d\theta'''.$$

Si π', π'', π''' são os angulos que o eixo da rotação $d\theta$ faz, respectivamente, com os eixos das rotações $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$, é claro que :

$$\cos\pi' = \frac{d\theta'}{d\theta}, \quad \cos\pi'' = \frac{d\theta''}{d\theta}, \quad \cos\pi''' = \frac{d\theta'''}{d\theta}.$$

« Vê-se, pelo que fica dito, que estas composições e decomposições dos movimentos de rotação são inteiramente analogas ás dos movimentos rectilineos.

« Com effeito, si tomarmos sobre os tres eixos das rotações $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, desde o seu ponto de intersecção, linhas proporcionaes respectivamente a $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, e si construirmos sobre estas tres linhas um parallelipipedo, é facil

de ver que a diagonal d'este parallelipipedo será o eixo da rotação composta $d\theta$, e será ao mesmo tempo proporcional a esta rotação composta $d\theta$. D'ahi, e porque as rotações em torno d'um mesmo eixo se ajuntam ou se subtrahem conforme sejam no mesmo sentido ou em sentidos oppostos, como os movimentos que teem a mesma direcção ou direcções oppostas, deve-se concluir em geral que a composição e a decomposição dos movimentos de rotação fazem-se da mesma maneira e seguem as mesmas leis que a composição ou decomposição dos movimentos rectilineos, segundo a direcção dos eixos de rotação. » (Lagrange, *Mecanica Analytica*.)

506. As equações de Euler (26), quando integradas, dar-nos-hão os valores das *variaveis dynamicas* p, q, r ; e dos valores d'estas quantidades ficará dependendo o conhecimento da direcção dos tres eixos principaes que passam pela origem das coordenadas do solido, isto é, a posição do solido.

Com effeito, para isto, bastará que se tenha em vista as tres equações (15). Ellas, reunidas ás seis equações (2), nos farão conhecer os valores das nove variaveis que exprimem os angulos que cada eixo principal faz com os tres eixos fixos no espaço.

Assim, em cada instante, a direcção dos eixos principaes ficará conhecida ; e como elles são adherentes ao solido, a posição do solido ficará perfeitamente determinada em cada instante. Mas Euler, a quem devemos a solução definitiva do problema da rotação, simplificou extremamente a determinação da direcção dos eixos principaes do solido.

507. Para vermos em que consiste esta simplificação, consideremos (fig. 145) os mesmos dous systemas de eixos coordenados (Ox, Oy, Oz), (Ox_1, Oy_1, Oz_1). Seja ON a intersecção do plano dos xy com o plano dos x_1y_1. Chamemos θ o angulo formado pelos planos xy e x_1y_1 ; ψ o angulo formado pela intersecção ON com o eixo dos x, e φ o angulo que ON faz com o eixo dos x_1.

Isto posto, a *Geometria algebrica* nos permitte escrever as relações seguintes :

$$\left.\begin{aligned}
a &= \cos\theta.\ \text{sen}\ \psi.\ \text{sen}\ \varphi + \cos\psi.\ \cos\varphi,\\
b &= \cos\theta.\ \text{sen}\ \psi.\ \cos\varphi - \cos\psi.\ \text{sen}\ \varphi,\\
c &= \text{sen}\ \theta.\ \text{sen}\ \psi;\\
a' &= \cos\theta.\ \cos\psi.\ \text{sen}\ \varphi - \text{sen}\ \psi.\ \cos\varphi,\\
b' &= \cos\theta.\ \cos\psi.\ \cos\varphi + \text{sen}\ \psi.\ \text{sen}\ \varphi,\\
c' &= \text{sen}\ \theta.\ \cos\psi;\\
a'' &= -\ \text{sen}\ \theta.\ \text{sen}\ \varphi'\\
b'' &= -\ \text{sen}\ \theta.\ \cos\varphi,\\
c'' &= \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Ora, a substituição d'estes valores nas tres equações (15) nos dará um systema de equações sufficientes para a determinação dos angulos θ, ψ e φ, quando os valores de p, q, r forem conhecidos, e, portanto, para a determinação da direcção dos eixos principaes do solido. Este systema de equações será :

$$\begin{aligned}
pdt &= \text{sen}\ \varphi.\ \text{sen}\ \theta.\ d\psi - \cos\varphi.\ d\theta,\\
qdt &= \cos\varphi.\ \text{sen}\ \theta.\ d\psi + \text{sen}\ \varphi.\ d\theta,\\
rdt &= d\varphi - \cos\theta.\ d\psi.
\end{aligned}$$

Pela substituição dos valores (31) nas expressões :

$$N = aM + a'M' + a''M'',\quad N' = bM + b'M' + b''M'',$$

$$N'' = cM + c'M' + c''M'',$$

teremos as quantidades N, N', N'' dependentes unicamente das *variaveis geometricas* θ, ψ, φ.

508. Assim, o estudo do movimento de rotação d'um solido invariavel livre, de figura qualquer, em torno d'um pólo, forneceu a Euler as seis equações differenciaes de

primeira ordem, entre as tres variaveis dynamicas (p,q,r), as tres variaveis geometricas (φ, ψ, θ), e o tempo t, equações que constituem o systema seguinte :

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)\, qr + N, \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A)\, pr + N',$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)\, pq + N'';$$

$$pdt = \text{sen}\, \varphi .\ \text{sen}\, \theta .\ d\, \psi - \cos \varphi\, d\, \theta,$$

$$qdt = \cos \varphi .\ \text{sen}\, \theta .\ d\, \psi + \text{sen}\, \varphi\, d\, \theta,$$

$$rdt = d\, \varphi - \cos \theta .\ d\, \psi.$$

Si d'este systema de equações differenciaes eliminassemos as tres variaveis p, q, r, obteriamos as tres equações differenciaes de segunda ordem entre as variaveis φ, ψ, θ, t, devidas a D'Alembert ; mas as seis equações de Euler serão eternamente preferiveis.

309. Para bem julgarmos da importancia d'esta theoria, transcrevamos as judiciosas reflexões seguintes :

« Simplificada tanto quanto possivel, pelo mais fecundo dos grandes geometras, a formulação da rotação deve, finalmente, resultar da combinação de dous grupos de incognitas, umas dynamicas, outras geometricas, cujo conjuncto exige seis equações, mas todas de primeira ordem. Então o problema consiste em determinar as tres componentes da velocidade angular em relação aos tres eixos principaes, e os tres angulos que caracterisam a situação variavel d'estes eixos relativamente ao systema fixo. Bem que as seis equações assim construidas jamais possam permittir a solução algebrica, ellas são normalmente preferiveis ás tres de segunda ordem que a questão devia directamente formar ; os dous modos fariam, finalmente, surgir uma equação de sexta ordem. Examinado logicamente, o conjuncto d'esta theoria deve sempre inspirar um profundo attractivo aos espiritos verdadeiramente philosophicos, como fornecendo o melhor exemplo da subordinação mathematica do abstracto ao concreto.

« Encarada scientificamente, a elaboração aborta, mesmo no caso d'uma simples impulsão, a menos que a fórma do corpo seja extremamente simples ; mas este insuccesso, normalmente previsto, só faz confirmar a renuncia necessaria ás soluções especiaes em mecanica racional.

« Elaborada pelo derradeiro representante da evolução mathematica, a theoria da rotação produziu uma concepção mal instituida, que o meu tratado fundamental approvou, por falta de exame bem profundo d'um trabalho pretendente a substituir a melhor applicação da algebra á mecanica. Emquanto os conjugados estaticos tinham utilmente ligado a rotação á translação, a sua imitação dynamica foi irracionalmente dirigida para a subordinação inversa, de modo a reproduzir as mesmas theorias, mas sem resultados importantes, e sob a confusão devida a restricções infinitesimaes. Explorada assim, a rotação dá logar a enigmas geometricos essencialmente equivalentes aos enigmas algebricos ; mas sem admittir a marcha directa e racional das construcções verdadeiramente originaes, a doutrina nada ganha e o methodo muito perde. Relativamente ao unico resultado que possa normalmente deixar um tal esforço, já o apreciei acima, sob a impulsão geometrica pela assimilação immediata do movimento total d'um solido livre ao da porca sobre o parafuso, segundo a helice osculatriz. Devemos sómente completar, a este respeito, a theoria algebrica da rotação, formulando a determinação do pólo em torno do qual o eixo torna-se parallelo á translação.» (A. Comte.)

310. Consideremos o ponto (x_1', y_1', z_1') do eixo instantaneo de rotação e seja u a distancia d'este ponto á origem dos eixos Ox_1, Oy_1, Oz_1.

As suas coordenadas serão :

$$x_1' = \frac{pu}{\omega}, \quad y_1' = \frac{qu}{\omega}, \quad z_1' = \frac{ru}{\omega}.$$

Si o eixo instantaneo de rotação fosse obrigado a passar pelo ponto considerado as suas equações tomariam a fórma seguinte :

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_1' &= \frac{p}{r}(z_1 - z_1'), \\ y_1 - y_1' &= \frac{q}{r}(z_1 - z_1'). \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Ora, no movimento de translação d'um solido invariavel, a trajectoria que no espaço descreve o seu centro de gravidade representa a trajectoria do mesmo solido.

E como, em cada instante, a direcção do movimento de translação d'um ponto é dada pela da tangente á sua trajectoria, é claro que as equações d'esta tangente definirão a direcção da translação do solido. D'est'arte, supponhamos que, em um instante dado, sejam

$$x_1 = mz_1 + m', \quad y_1 = nz_1 + n' \quad (33)$$

as equações da tangente á curva que no espaço descreve o centro de gravidade d'um solido livre. Si a recta representada pelas equações (32) torna-se parallela á direcção dada pelas equações (33), teremos :

$$m = \frac{p}{r}, n = \frac{q}{r};$$

d'onde,

$$x_1 - \frac{pu}{\omega} = m\left(z_1 - \frac{ru}{\omega}\right), \quad y_1 - \frac{qu}{\omega} = n\left(z_1 - \frac{ru}{\omega}\right)$$

serão as equações do eixo instantaneo, que, em torno do pólo (x_1', y_1', z_1'), ficará parallelo á translação do solido invariavel livre.

Tal é a solução que damos ao problema formulado por A. Comte.

IMPRENSA NACIONAL.

E. Oliveira

MECANICA GERAL

Tomo II Est. IV